Transformaciones lineales acotadas. La norma de una transformación lineal. (Un tema del curso "Análisis funcional")

Dante Arroyo Sánchez, Sofía Cano Flores,
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

29 de octubre de 2020

Objetivos

- Demostrar el criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Demostrar la equivalencia de cuatro fórmulas para la norma de una transformación lineal.

Prerrequisitos

- Espacios normados, bolas en espacios normados.
- Transformaciones lineales en espacios vectoriales.
- El supremo y el ínfimo de un conjunto.
- El supremo de los valores de una función.

Operadores lineales

Sean V y W espacios vectoriales complejos.

Una función $T\colon V \to W$ se llama lineal, si es aditiva y homogénea:

- $\forall u, v \in V \qquad T(u+v) = T(u) + T(v)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall u \in V \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Operadores lineales

Sean V y W espacios vectoriales complejos.

Una función $T\colon V \to W$ se llama lineal, si es aditiva y homogénea:

- $\forall u, v \in V \qquad T(u+v) = T(u) + T(v)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall u \in V \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Terminología: función lineal = transformación lineal = operador lineal.

Algunos autores dicen “operador lineal” solamente cuando $W = V$.

Operadores lineales

Sean V y W espacios vectoriales complejos.

Una función $T\colon V \to W$ se llama lineal, si es aditiva y homogénea:

- $\forall u, v \in V \qquad T(u+v) = T(u) + T(v)$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall u \in V \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Terminología: función lineal = transformación lineal = operador lineal.

Algunos autores dicen "operador lineal" solamente cuando $W = V$.

En lo que sigue, suponemos que V y W son espacios normados.

Denotamos por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ las normas en estos espacios.

Denotamos por $B_V(v, r)$ y $B_W(w, r)$ las bolas en estos espacios.

Criterio de continuidad de una transformación lineal

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) T es Lipschitz continua.

(b) T es uniformemente continua.

(c) T es continua.

(d) T es continua en el punto 0_V.

(e) $\sup\{\|Tx\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \le 1\} < +\infty$.

(f) $T[B_V(0,1)]$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\exists C \ge 0 \qquad \forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \le C\,\|x\|_V$.

Esquema de la demostración

$$
\begin{tikzcd}
T[B_V(0,1)] \text{ es acot} \arrow[r] & \exists C \geq 0 \ \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V \arrow[dd] & T \text{ es continua en } 0_V \arrow[l] \\
 & & T \in C(V,W) \arrow[u] \\
\sup \left\| T[\overline{B_V(0,1)}] \right\|_W < \infty \arrow[uu] & T \in \mathrm{Lip(V,W)} \arrow[l] \arrow[r] & T \in C_u(V,W) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

(A) $\Rightarrow$ (E)

Como estamos suponiendo (a), existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|Tx - Ty\|_W \leq \gamma \|x - y\|_V.$$

Así, tomando $y = 0_V$ y $x \in V$ con $\|x\|_V \leq 1$, tenemos que

$$\|Tx - 0_W\|_W \leq \gamma \|x\|_V \leq \gamma.$$

Pasando al supremo,

$$\sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\| \leq \gamma.$$

Demostración (f)⇒(g)

Por la suposición, existe $M > 0$ tal que para todo $y \in T[B_V(0,1)]$ se cumple que $\|y\|_W \leq M$.

Sea $v \in V \setminus \{0_V\}$. Pongamos $x := \frac{v}{2\|v\|_V}$ y $C := 2M$.

Entonces $x \in B_V(0,1)$ y por la suposición, tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{2\|v\|_V}\|T(v)\|_W = \left\|T\left(\frac{v}{2\|v\|_V}\right)\right\|_W = \|Tx\|_W \leq M.$$

Es decir,

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\|_V.$$

Demostración (g)⇒(a)

Supongamos que existe $C \geq 0$ tal que para cada x en V se cumple que $\|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V$.

Sean $v, w \in V$, entonces:

$$\|Tv - Tw\|_W = \|T(v-w)\|_W \leq C\|v-w\|_V.$$

Demostración (d)$\Rightarrow$(g)

Sea $\varepsilon > 0$, entonces hallamos $\delta > 0$ tal que,

$$\forall v \in B_V(0_V, \delta) \quad \|Tv\|_W < \varepsilon.$$

Como el caso $y = 0_V$ es trivial, supongamos $y \in V \setminus \{0_V\}$ y pongamos $v := \frac{\delta y}{2\|y\|_V}$. Luego $\|v\|_V < \delta$, por lo cual,

$$\frac{\delta}{2\|y\|_V}\|Ty\|_W = \|Tv\|_W < \varepsilon.$$

Poniendo $C := \frac{2\varepsilon}{\delta}$,

$$\|Ty\|_W \leq C\|y\|_V.$$

Cuatro definiciones equivalentes de la norma

Proposición

Sean V y W espacios normados y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V\le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\{C\in[0,+\infty]\colon \quad \forall x\in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x\in V \quad \|Tx\|_W \le N_4(T)\|x\|_V.$$

Esquema de demostración

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\{C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Probaremos que:

$$N_4 \le N_3 \le N_2 \le N_1 \le N_4.$$

El ínfimo se alcanza

$$A \coloneqq \{C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V\}.$$

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_k \to N_4$.
Sea $x \in V$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|Tx\|_W \leq a_n\|x\|_V.$$

Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$\|Tx\|_W \leq N_4\|x\|_V.$$

Demostración $N_4 \leq N_3$.

$$A := \{C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V\}$$

$$N_3(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V}, \qquad N_4 = \inf(A).$$

Por la definición de supremo, para cada v en V, con $v \neq 0_V$,

$$\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \leq N_3, \qquad \text{luego} \qquad \|Tv\|_W \leq N_3\|v\|_V.$$

Luego $N_3 \in A$, y por definición del ínfimo se concluye lo deseado.

Demostración $N_3 \le N_2$

$$N_3(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V}, \qquad N_2(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W.$$

Por la definición de supremo, para cada $v \in V$ con $\|v\|_V = 1$ tenemos que $\|Tv\|_W \le N_2(T)$. Sea $y \in V \setminus \{0_V\}$, entonces:

$$\frac{\|T(y)\|_W}{\|y\|_V} = \left\| \frac{1}{\|y\|_V} T(y) \right\|_W = \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|_V} \right) \right\|_W \le N_2(T).$$

Pasando al supremo, obtenemos que $N_3 \le N_2$.

Demostración $N_2 \le N_1$

Denotamos por S_V la esfera unitaria en V y por $\overline{B_V}$ la bola unitaria cerrada en V:

$$S_V := \{x \in V \colon \quad \|x\|_V = 1\}, \qquad \overline{B_V} := \{x \in V \colon \quad \|x\|_V \le 1\}.$$

Definimos $f\colon V \to [0,+\infty)$, $f(x) := \|T(x)\|_W$. Entonces

$$N_1(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[\overline{B_V}]),$$

$$N_2(T) = \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W = \sup(f[S_V]).$$

Como $S_V \subseteq \overline{B_V}$, obtenemos $f[S_V] \subseteq f[\overline{B_V}]$ y $N_2(T) \le N_1(T)$.

Demostración $N_1 \leq N_4$

$$A := \{C \in [0, +\infty] : \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\|x\|_V\}.$$

Sean $M \in A$ y $x \in V$ tal que $\|x\|_V \leq 1$ entonces,

$$\|Tx\|_W \leq M\|x\|_V \leq M.$$

Luego,

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|Tx\|_W \leq M.$$

Hemos mostrado que $N_1(T)$ es una cota inferior de A. Luego $N_1 \leq N_4$.

Así, por la cadena de desigualdades que se mostró, tenemos que

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4.$$