Todo conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos

Objetivos. Demostrar que todo conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos. Se supone que la topología del plano está inducida por la métrica euclidiana.

Requisitos. Bola en un espacio métrico, producto cartesiano de dos conjuntos, distancia entre un punto y un conjunto.

1. Distancia de un punto a un conjunto (repaso). Sean $x \in \mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$. Entonces $d(x, A)$ se define mediante la siguiente regla:

$$d(x, A) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

2. Lema. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $Z \subset \mathbb{R}^2$. Entonces

$$d(x, Z) \le d(x, y) + d(y, Z).$$

Demostración. Para cualqueir $z \in Z$ se cumple la desigualdad triangular:

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

El sumando $d(x, z)$ es mayor o igual que $d(x, Z)$ porque $d(z, Z)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(x, z) \colon\ z \in Z\}$. Aplicamos la ley transitiva:

$$d(x, Z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

Pasamos $d(x, y)$ al lado izquierdo:

$$d(x, Z) - d(x, y) \le d(y, z).$$

La última desigualdad significa que $d(x, Z) - d(x, y)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(y, z) \colon\ z \in Z\}$. Ahora por la definición del inf obtenemos que

$$d(x, Z) - d(x, y) \le d(y, Z).$$

Pasando $d(x, y)$ al lado derecho obtenemos el resultado requerido. $\square$

3. Observación. El conjunto vacío se puede representar como una unión numerable de rectángulos vacíos, por ejemplo

$$\varnothing = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (7, 6) \times (4, 4).$$

Este caso trivial está excluído de la siguiente proposición.

4. Proposición (de la estructura de los conjuntos abiertos en el plano euclidiano). Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $A \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión de rectángulos abiertos $\big((a_k, b_k) \times (c_k, d_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ que cubre el conjunto A:

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k, b_k) \times (c_k, d_k).$$

Demostración. El caso $A = \mathbb{R}^2$ es simple:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (j-1, j+1) \times (k-1, k+1).$$

Consideramos el caso $A \neq \mathbb{R}^2$. El conjunto $A \cap \mathbb{Q}^2$ es numerable. Elegimos una numeración $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de este conjunto: $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} = A \cap \mathbb{Q}^2$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ la distancia entre el punto p_k y el conjunto cerrado $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es positiva:

$$\rho_k := d(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) = \inf_{q\in\mathbb{R}^2\setminus A} d(p_k, q) > 0.$$

Construimos los siguientes cuadrados abiertos alrededor de los puntos p_k:

$$R_k := \left(x_k - \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}, x_k + \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}\right) \times \left(y_k - \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}, y_k + \frac{\rho_k}{\sqrt{2}}\right).$$

Notemos que

$$B\left(p_k, \frac{\rho_k}{2}\right) \subset R_k \subset B(p_k, \rho_k).$$

Por lo tanto, $R_k \subset A$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k \subset A.$$

Falta demostrar la contención inversa. Sea $q = (u, v) \in A$ y sea

$$\delta = d(q, \mathbb{R}^2 \setminus A).$$

Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ encontramos $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|\alpha - u| < \frac{\delta}{4\sqrt{2}}, \qquad |\beta - v| < \frac{\delta}{4\sqrt{2}}.$$

Entonces

$$d((\alpha, \beta), (u, v)) < \frac{\delta}{4}$$

y por lo tanto $(\alpha, \beta) \in A \cap \mathbb{Q}^2$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_k = (\alpha, \beta)$. Notemos que

$$d(q, \mathbb{R}^2 \setminus A) \leq d(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) + d(p_k, q),$$

de donde

$$\rho_k = d(p_k, \mathbb{R}^2 \setminus A) > \delta - \frac{\delta}{4} > \frac{\delta}{2}.$$

Como $d(q, p_k) < \delta/4$, concluimos que

$$q \in B\left(p_k, \frac{\delta}{4}\right) \subset B\left(p_k, \frac{\rho_k}{2}\right) \subset R_k. \qquad \square$$