Teorema de la función abierta

Objetivos. Demostrar el teorema de Banach–Schauder sobre la función abierta, para operadores lineales continuas entre espacios de Banach.

Prerrequisitos. Teorema de Baire, espacio de Banach, operador lineal continuo entre espacios normados.

1 Repaso (un corolario del teorema de Baire)**.** Recordamos que si Y es un espacio métrico completo, entonces Y no es magro. Esto significa que

$$\nexists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \wedge \quad \forall k\in\mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = \varnothing \right).$$

Escribamos esta afirmación en otra forma equivalente, usando las leyes de De Morgan y transformando $\overline{p \wedge q}$ en $p \to \overline{q}$:

$$\forall (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right) \quad \Longrightarrow \quad (\exists k\in\mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) \neq \varnothing)\,.$$

2 Definición (función abierta)**.** Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que la función f es *abierta* si para cada subconjunto A abierto en X, su imagen $f(A)$ es un conjunto abierto en Y.

3 Lema. *Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Denotemos por B_X a la bola unitaria de X y por B_Y a la bola unitaria de Y:*

$$B_X \coloneqq \{x \in X\colon\ \|x\|_X < 1\}, \qquad B_Y \coloneqq \{y \in Y\colon\ \|y\|_Y < 1\}.$$

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T(rB_X)$. Entonces la función T es abierta.

Demostración. Sea V un conjunto abierto en X. Vamos a demostrar que $T(V)$ es abierto en Y. Sea $y \in T(V)$. Elegimos x en V tal que $y = Tx$. Usando la suposición que V es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq V$. La suposición $B_Y \subseteq T(rB_X)$ implica que $\frac{s}{r}B_Y \subseteq T(sB_X)$ y

$$y + \frac{s}{r}B_Y \subseteq T(x) + T(sB_X) = T(x + sB_X) \subseteq T(V). \qquad \square$$

4 Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ una función abierta. Muestre que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T(rB_X)$.

5 Lema. *Sea Y un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de Y. Entonces* $\operatorname{clos}(P) + \operatorname{clos}(Q) \subseteq \operatorname{clos}(P+Q)$.

Demostración. Este resultado se sigue de la continuidad de la operación $+\colon Y \times Y \to Y$ y de la definición de la topología en $Y \times Y$. Sin embargo, veremos una demostración más elemental. Sea $c \in \operatorname{clos}(P) + \operatorname{clos}(Q)$. Entonces existen $a \in \operatorname{clos}(P)$, $b \in \operatorname{clos}(Q)$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que $c = a + b$, $\lim_{k\to\infty} p_k = a$ y $\lim_{k\to\infty} q_k = b$. Para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos que $p_k + q_k \in P + Q$, y de la desigualdad

$$\|(p_k + q_k) - (a+b)\| \le \|p_k - a\| + \|q_k - b\|$$

se sigue que $\lim_{k\to\infty}(p_k + q_k) = a + b = c$, así que $c \in \operatorname{clos}(P+Q)$. $\square$

6 Teorema (de la función abierta)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $T(X) = Y$. Entonces la función T es abierta.*

Demostración. 1. Obviamente $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(kB_X)$. Usamos la suposición que T es sobre:

$$Y = T(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T(kB_X).$$

Por el teorema de Baire, el espacio Y no es magro. Luego existe un k en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\operatorname{clos}(T(kB_X))) \ne \varnothing$. Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{clos}(T(kB_X))$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq \operatorname{clos}(T(kB_X)) + \operatorname{clos}(T(kB_X)) \\ &\overset{\text{(i)}}{\subseteq} \operatorname{clos}(T(kB_X) + T(kB_X)) = \operatorname{clos}(T(kB_X + kB_X)) \overset{\text{(ii)}}{\subseteq} \operatorname{clos}(T(2kB_X)), \end{aligned}$$

donde la contención (i) se sigue del Lema 5 y la contención (ii) se sigue de la definición de las bolas. Pongamos $R = 2k/r$. Entonces

$$B_Y \subseteq \operatorname{clos}(T(RB_X)).$$

Esto significa que

$$\forall z \in Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad (\|x\|_X \le R\|z\|_Y \quad \wedge \quad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon)\,. \tag{1}$$

2. Sea $y \in B_Y$. Vamos a construir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera. Aplicando (1) con $z = y$ y $\varepsilon = 1/2$ elegimos x_1 en RB_X tal que $\|Tx_1 - y\|_Y < 1/2$. Supongamos que x_k satisface

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\sum_{j=1}^{k} x_j \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Aplicando (1) con $z = y - \sum_{j=1}^{k} x_j$ y $\varepsilon = 1/2^{k+1}$ elegimos x_{k+1} tal que

$$\|x_{k+1}\|_X < \frac{R}{2^k}, \qquad \left\| y - T\sum_{j=1}^{k+1} x_j \right\|_Y < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X$ converge y el espacio X es completo, luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X. En otras palabras, si $s_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$, entonces $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Denotemos por t al límite de esta sucesión:

$$t = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k.$$

Entonces $\|t\|_X < 2R$ y $Tt = y$. Por lo tanto $y \in T(2RB_X)$. Como y fue un elemento arbitrario de B_Y, hemos probado que $B_Y \subseteq T(2RB_X)$. Por el Lema 3, la función T es abierta. □

7 Corolario. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ una transformación lineal biyectiva. Entonces su inversa es continua.*

Demostración. Primero notemos que existe una única función T^{-1}, inversa a T, y esta función es lineal. Por el teorema de la función abierta, T es abierta. Luego para cada conjunto V abierto en X, el conjunto $T(V)$ es abierto en Y. Pero $T(V)$ es la preimagen de V bajo T^{-1}. □

8 Corolario. *Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en X tales que $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach. Entonces las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.*