El teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

26 de abril de 2022

Plan

Objetivo

Demostrar el teorema de Banach–Schauder sobre la función abierta, para operadores lineales continuas entre espacios de Banach.

Objetivo

Demostrar el teorema de Banach–Schauder sobre la función abierta, para operadores lineales continuas entre espacios de Banach.

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T[X] = Y$. Entonces la función T es abierta.

Prerrequisitos

- Teorema de Baire.
- Bolas y topología en espacios normados.
- El concepto del espacio de Banach.
- El concepto de operador lineal continuo entre espacios normados.

Plan

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Esto significa que

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Esto significa que

$$\nexists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \wedge \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = \emptyset \right).$$

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Esto significa que

$$\nexists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \wedge \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = \emptyset \right).$$

Otra forma equivalente (transformamos $\overline{p \wedge q}$ en $p \to \overline{q}$):

Un corolario del teorema de Baire (repaso)

Si Y es un espacio métrico completo no vacío, entonces Y no es magro.

Esto significa que

$$\nexists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad \wedge \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = \emptyset \right).$$

Otra forma equivalente (transformamos $\overline{p \wedge q}$ en $p \to \overline{q}$):

$$\forall (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^Y)^{\mathbb{N}} \quad \left(Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) \neq \emptyset\Big).$$

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos (repaso)

Suponemos que $T\colon X \to Y$ es una transformación lineal.

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos (repaso)

Suponemos que $T\colon X \to Y$ es una transformación lineal.

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$T[\lambda A] = \lambda\, T[A].$$

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos (repaso)

Suponemos que $T\colon X \to Y$ es una transformación lineal.

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$T[\lambda A] = \lambda T[A].$$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $b \in X$. Mostrar que

$$T[b + A] = T(b) + T[A].$$

Transformaciones lineales y operaciones con conjuntos (repaso)

Suponemos que $T\colon X \to Y$ es una transformación lineal.

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Mostrar que

$$T[\lambda A] = \lambda T[A].$$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $b \in X$. Mostrar que

$$T[b + A] = T(b) + T[A].$$

Ejercicio. Sean $P, Q \subseteq X$. Mostrar que

$$T[P + Q] = T[P] + T[Q].$$

Bolas en espacios normados y conjuntos abiertos (repaso)

Dado un espacio normado X, denotemos por B_X la bola unitaria abierta en X:

$$B_X \coloneqq B_X(0_X, 1) = \{x \in X\colon\ \|x\| < 1\}.$$

Bolas en espacios normados y conjuntos abiertos (repaso)

Dado un espacio normado X, denotemos por B_X la bola unitaria abierta en X:

$$B_X := B_X(0_X, 1) = \{x \in X\colon\ \|x\| < 1\}.$$

Recordamos que

$$B_X(a, r) = a + rB_X.$$

Bolas en espacios normados y conjuntos abiertos (repaso)

Dado un espacio normado X, denotemos por B_X la bola unitaria abierta en X:

$$B_X := B_X(0_X, 1) = \{x \in X : \ \|x\| < 1\}.$$

Recordamos que

$$B_X(a, r) = a + rB_X.$$

Criterio de conjunto abierto en X:

$$A \in \tau_X \qquad \Longleftrightarrow$$

Bolas en espacios normados y conjuntos abiertos (repaso)

Dado un espacio normado X, denotemos por B_X la bola unitaria abierta en X:

$$B_X \coloneqq B_X(0_X, 1) = \{x \in X\colon\ \|x\| < 1\}.$$

Recordamos que

$$B_X(a, r) = a + rB_X.$$

Criterio de conjunto abierto en X:

$$A \in \tau_X \qquad \iff \qquad \forall a \in A \qquad \exists r > 0 \qquad a + rB_X \subseteq A.$$

Función abierta

Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$.

Se dice que la función f es abierta si

Función abierta

Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$.
Se dice que la función f es abierta si

$$\forall A \in \tau_X \qquad f[A] \in \tau_Y .$$

Función abierta

Sean X, Y espacios topológicos y sea $f\colon X \to Y$.

Se dice que la función f es abierta si

$$\forall A \in \tau_X \qquad f[A] \in \tau_Y .$$

Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ una función abierta.

Mostrar que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Como A es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq A$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Como A es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq A$.

La suposición $B_Y \subseteq T[rB_X]$ implica que $\frac{s}{r}B_Y \subseteq T[sB_X]$.

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Como A es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq A$.

La suposición $B_Y \subseteq T[rB_X]$ implica que $\frac{s}{r}B_Y \subseteq T[sB_X]$. Luego

$$y + \frac{s}{r}B_Y \subseteq$$

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Como A es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq A$.

La suposición $B_Y \subseteq T[rB_X]$ implica que $\frac{s}{r}B_Y \subseteq T[sB_X]$. Luego

$$y + \frac{s}{r}B_Y \;\subseteq\; T(x) + T[sB_X] = T[x + sB_X] \;\subseteq$$

Lema sobre una función abierta

Lema

Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y \subseteq T[rB_X]$.

Entonces T es abierta.

Demostración.

Sea $A \in \tau_X$. Sea $y \in T[A]$. Elegimos x en A tal que $y = Tx$.

Como A es abierto, encontramos $s > 0$ tal que $x + sB_X \subseteq A$.

La suposición $B_Y \subseteq T[rB_X]$ implica que $\frac{s}{r}B_Y \subseteq T[sB_X]$. Luego

$$y + \frac{s}{r}B_Y \ \subseteq\ T(x) + T[sB_X] = T[x + sB_X] \ \subseteq\ T[A].$$

Lema sobre la cerradura multiplicada por un número

Lema

Sea Y un espacio normado complejo, sea $P \subseteq Y$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathrm{cl}(\lambda P) = \lambda\, \mathrm{cl}(P).$$

Demostración: ejercicio.

Lema sobre la diferencia aritmética de las cerraduras

Lema

Sea Y un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de Y. Entonces

$$\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q).$$

Lema sobre la diferencia aritmética de las cerraduras

Lema

Sea Y un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de Y. Entonces

$$\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q).$$

Este resultado se sigue de la continuidad de las operaciones lineales
y de la definición de la topología en $Y \times Y$.
Sin embargo, veremos una demostración más elemental.

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.

Encontramos $a \in \mathrm{cl}(P)$, $b \in \mathrm{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.

Demostración del lema: $\operatorname{cl}(P) - \operatorname{cl}(Q) \subseteq \operatorname{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \operatorname{cl}(P) - \operatorname{cl}(Q)$.

Encontramos $a \in \operatorname{cl}(P)$, $b \in \operatorname{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.

Encontramos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = b.$$

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.

Encontramos $a \in \mathrm{cl}(P)$, $b \in \mathrm{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.

Encontramos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = b.$$

Entonces para cada k tenemos que $p_k - q_k \in P - Q$,

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.

Encontramos $a \in \mathrm{cl}(P)$, $b \in \mathrm{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.

Encontramos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = b.$$

Entonces para cada k tenemos que $p_k - q_k \in P - Q$,

$$\|(p_k - q_k) - (a - b)\| \leq \|p_k - a\| + \|q_k - b\|.$$

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.

Encontramos $a \in \mathrm{cl}(P)$, $b \in \mathrm{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.

Encontramos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = b.$$

Entonces para cada k tenemos que $p_k - q_k \in P - Q$,

$$\|(p_k - q_k) - (a - b)\| \leq \|p_k - a\| + \|q_k - b\|.$$

Luego $\lim_{k\to\infty} (p_k - q_k) = a - b = c$,

Demostración del lema: $\mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q) \subseteq \mathrm{cl}(P - Q)$

Sea $c \in \mathrm{cl}(P) - \mathrm{cl}(Q)$.
Encontramos $a \in \mathrm{cl}(P)$, $b \in \mathrm{cl}(Q)$, tales que $c = a - b$.
Encontramos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P^{\mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = b.$$

Entonces para cada k tenemos que $p_k - q_k \in P - Q$,

$$\|(p_k - q_k) - (a - b)\| \leq \|p_k - a\| + \|q_k - b\|.$$

Luego $\lim\limits_{k\to\infty}(p_k - q_k) = a - b = c$, así que $c \in \mathrm{cl}(P - Q)$.

Plan

El teorema de la transformación lineal abierta

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T[X] = Y$.

Entonces la función T es abierta.

El teorema de la transformación lineal abierta

Teorema

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T[X] = Y$.

Entonces la función T es abierta.

Plan de la demostración:

1. $\exists k \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset$.
2. $\exists R > 0 \qquad B_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.
3. $\exists R > 0 \qquad B_Y \subseteq T[2RB_X]$.

Inicio de la demostración

Obviamente,

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (kB_X).$$

Inicio de la demostración

Obviamente,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (kB_X).$$

Usamos la suposición que T es sobre:

$$Y = T[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T[kB_X].$$

Inicio de la demostración

Obviamente,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (kB_X).$$

Usamos la suposición que T es sobre:

$$Y = T[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T[kB_X].$$

Por el teorema de Baire, el espacio Y no es magro.

Inicio de la demostración

Obviamente,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (kB_X).$$

Usamos la suposición que T es sobre:

$$Y = T[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T[kB_X].$$

Por el teorema de Baire, el espacio Y no es magro.

Luego existe un k en $\mathbb{N}$ tal que

Inicio de la demostración

Obviamente,

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (kB_X).$$

Usamos la suposición que T es sobre:

$$Y = T[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T[kB_X].$$

Por el teorema de Baire, el espacio Y no es magro.

Luego existe un k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$.

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y =$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y = (w + rB_Y) - w$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y = (w + rB_Y) - w \subseteq$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y = (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y)$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \end{aligned}$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y = (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X])$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$rB_Y = (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y)$$

$$\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \mathrm{cl}(T[kB_X]) - \mathrm{cl}(T[kB_X]) \subseteq \mathrm{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \end{aligned}$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \\ &= \end{aligned}$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \\ &= \operatorname{cl}(T[kB_X - kB_X]) \end{aligned}$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \\ &= \operatorname{cl}(T[kB_X - kB_X]) = \end{aligned}$$

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \\ &= \operatorname{cl}(T[kB_X - kB_X]) = \operatorname{cl}(T[2kB_X]). \end{aligned}$$

Pongamos $R = 2k/r$.

Segunda etapa

Hemos mostrado que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(T[kB_X])) \neq \emptyset.$$

Elegimos $w \in Y$, $r > 0$ tales que $w + rB_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X])$. Luego

$$\begin{aligned} rB_Y &= (w + rB_Y) - w \subseteq (w + rB_Y) - (w + rB_Y) \\ &\subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X]) - \operatorname{cl}(T[kB_X]) \subseteq \operatorname{cl}(T[kB_X] - T[kB_X]) \\ &= \operatorname{cl}(T[kB_X - kB_X]) = \operatorname{cl}(T[2kB_X]). \end{aligned}$$

Pongamos $R = 2k/r$. Entonces $B_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $\quad B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X]).$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $\quad B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\quad \mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\| \, \mathrm{cl}(B_Y)$$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $B_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\operatorname{cl}(B_Y) \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\| \operatorname{cl}(B_Y) \subseteq$$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\| \, \mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \|z\| \, \mathrm{cl}(T[RB_X])$$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\|\,\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \|z\|\ \mathrm{cl}(T[RB_X]) =$$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $B_Y \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \mathrm{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\| \,\mathrm{cl}(B_Y) \subseteq \|z\| \,\mathrm{cl}(T[RB_X]) = \mathrm{cl}(T[R\,\|z\|\,B_X]).$$

Segunda etapa: el resultado obtenido en una forma más cómoda

Hemos mostrado que $\quad B_Y \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.

Esto implica que $\quad \operatorname{cl}(B_Y) \subseteq \operatorname{cl}(T[RB_X])$.

Dado z en Y, tenemos

$$z \in \|z\| \operatorname{cl}(B_Y) \subseteq \|z\| \operatorname{cl}(T[RB_X]) = \operatorname{cl}(T[R\,\|z\|\,B_X]).$$

Esto implica que

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon.$$

Tercera etapa: ¿qué vamos a construir?

Hemos mostrado que

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Tercera etapa: ¿qué vamos a construir?

Hemos mostrado que

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Sea $y \in B_Y$.

Tercera etapa: ¿qué vamos a construir?

Hemos mostrado que

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Sea $y \in B_Y$. Vamos a construir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada k,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Tercera etapa: ¿qué vamos a construir?

Hemos mostrado que

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Sea $y \in B_Y$. Vamos a construir una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada k,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Primer paso. Aplicando (1) con $z = y$, $\varepsilon = 1/2$ encontramos $x_1 \in RB_X$ tal que

$$\|T(x_1) - y\|_Y < 1/2.$$

Tercera etapa, construcción de la sucesión

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\, B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Tercera etapa, construcción de la sucesión

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\,B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Supongamos que x_k satisface

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Tercera etapa, construcción de la sucesión

$$\forall z \in Y \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in (R\,\|z\|_Y)\, B_X \qquad \|Tx - z\|_Y < \varepsilon. \tag{1}$$

Supongamos que x_k satisface

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Aplicando (1) con $z = y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)$, $\varepsilon = 1/2^{k+1}$, elegimos x_{k+1} tal que

$$\|x_{k+1}\|_X < \frac{R}{2^k}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}},$$

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)\right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Como X es completo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X.

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Como X es completo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X.

$$u := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k.$$

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Como X es completo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X.

$$u := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k.$$

Entonces $\quad \|u\|_X < 2R, \quad Tu = y.$

Tercera etapa, final: $B_Y \subseteq T[2RB_X]$

Dado $y \in B_Y$, hemos construido $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$,

$$\|x_k\|_X < \frac{R}{2^{k-1}}, \qquad \left\| y - T\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) \right\|_Y < \frac{1}{2^k}.$$

Como X es completo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X.

$$u := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k.$$

Entonces $\quad \|u\|_X < 2R, \quad Tu = y. \quad$ Por lo tanto, $\quad y \in T[2RB_X]$.

Plan

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva.
Entonces su inversa es continua.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva. Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que T es biyectiva. Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Como T es biyectiva, existe una única función T^{-1}, inversa a T.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva.
Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Como T es biyectiva, existe una única función T^{-1}, inversa a T.
Es fácil ver que T^{-1} es lineal.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva.

Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Como T es biyectiva, existe una única función T^{-1}, inversa a T.

Es fácil ver que T^{-1} es lineal.

Por el teorema de la función abierta, T es abierta.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva.

Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Como T es biyectiva, existe una única función T^{-1}, inversa a T.

Es fácil ver que T^{-1} es lineal.

Por el teorema de la función abierta, T es abierta.

Luego para cada conjunto A abierto en X, el conjunto $T[A]$ es abierto en Y.

Corolario sobre transformaciones lineales continuas biyectivas

Corolario

Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que T es biyectiva.
Entonces su inversa es continua.

Demostración.

Como T es biyectiva, existe una única función T^{-1}, inversa a T.

Es fácil ver que T^{-1} es lineal.

Por el teorema de la función abierta, T es abierta.

Luego para cada conjunto A abierto en X, el conjunto $T[A]$ es abierto en Y.

Pero $T[A]$ es la preimagen de A bajo T^{-1}.

Corolario sobre normas comparables en espacios de Banach

Corolario

Sea X un espacio vectorial complejo y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en X tales que $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach y

$$\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$$

Entonces $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$.

Corolario sobre normas comparables en espacios de Banach

Corolario

Sea X un espacio vectorial complejo y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en X tales que $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(X, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach y

$$\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$$

Entonces $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$.

Idea de demostración: considerar el operador identidad $(X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$.