Medida de Lebesgue unidimensional: construcción por del teorema de Carathéodory y propiedades principales

Objetivos. Aplicar el teorema de Carathéodory para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$; demostrar las propiedades principales de la medida de Lebesgue.

Requisitos. La medida exterior asociada a una premedida definida en un anillo, conjuntos Carathéodory-medibles respecto a una medida exterior, teorema de Carathéodory, la longitud de intervalos semiabiertos $[a, b)$ es una premedida.

1 Observación (semianillo de cajas semiabiertas, repaso)**.** Consideremos la colección $\mathcal{S}$ de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Recordar cómo se demuestra que $\mathcal{S}$ es un semianillo. En particular, representar la diferencia de dos intervalos semiabiertos

$$[a, b) \setminus [c, d)$$

como una unión disjunta de intervalos semiabiertos.

2 Observación (longitud de intervalos semiabiertos, repaso)**.** Definimos $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \le b$,

$$\lambda\big([a, b)\big) \coloneqq b - a.$$

Sabemos que λ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.

3 Observación (uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos)**.** Denotemos por $\mathcal{R}$ al anillo sobre $\mathbb{R}$ generado por el semianillo $\mathcal{S}$. Ya sabemos que los elementos de $\mathcal{R}$ se pueden escribir de la siguiente forma:

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j), \tag{1}$$

donde $a_j \le b_j$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ y $b_j \le a_{j+1}$ para cada j en $\{1, \ldots, m - 1\}$.

4 Observación (longitud de uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos)**.** La premedida λ se extiende de manera única al anillo $\mathcal{R}$. Si A es de la forma (1),

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j).$$

5 Observación (la medida exterior inducida por λ)**.** Definimos $\lambda^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,+\infty]$ mediante la siguiente regla. Para cada $P \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(P) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \colon \quad (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \quad \wedge \quad P \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right\}.$$

Como cada elemento de $\mathcal{R}$ es una unión finita de elementos de $\mathcal{S}$, se tiene también otra fórmula equivalente:

$$\lambda^*(P) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \colon \quad (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \quad \wedge \quad P \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right\}.$$

Sabemos que λ^* es una medida exterior.

6 Observación (conjuntos Carathéodory-medibles respecto a λ^*, repaso)**.** Denotamos por $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ a la colección de los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a λ^*:

$$\mathcal{C}_{\lambda^*} := \Big\{ Y \subseteq \mathbb{R} \colon \quad \forall P \in 2^{\mathbb{R}} \quad \lambda^*(P \cap A) + \lambda^*(P \setminus A) = \lambda^*(P) \Big\}.$$

Sabemos que $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ es una σ-álgebra, y la restricción de λ^* a $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ es una medida completa.

7 Definición (la σ-álgebra de Lebesgue y la medida de Lebesgue)**.** Definimos la σ-álgebra de Lebesgue como la colección de los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a la medida exterior λ^*. La denotemos por $\mathcal{F}$. Definimos la medida de Lebesgue como la restricción de λ^* a $\mathcal{F}$. La denotemos por $\mu_{\mathbb{R}}$ o simplemente por μ.

$$\mathcal{F} := \mathcal{C}_{\lambda^*}, \qquad \mu := \lambda^*|_{\mathcal{F}}.$$

8 Lema. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces, $(a,b) \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu\big((a,b)\big) = b - a.$$

Demostración. El conjunto A se puede ver como una unión numerable creciente de intervalos semiabiertos:

$$(a,b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{k}, b \right),$$

por eso $A \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \left(b - a + \frac{1}{k} \right) = a - b. \qquad \square$$

9 Ejercicio. Mostrar resultados similares para los intervalos abiertos no acotados:

$$(a,+\infty) \in \mathcal{F}, \quad (-\infty,b) \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{R} \in \mathcal{F},$$

$$\mu\Big((a,+\infty)\Big) = +\infty, \quad \mu\Big((-\infty,b)\Big) = +\infty, \quad \mu(\mathbb{R}) = +\infty.$$

10 Proposición. *Cada subconjunto abierto de* $\mathbb{R}$ *es Lebesgue-medible. La* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *está contenida en la* σ*-álgebra de Lebesgue* $\mathcal{F}$.

Demostración. Ya sabemos que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión finita o numerable de intervalos abiertos, y por eso pertenece a $\mathcal{F}$. Esto significa que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$, concluimos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

11 Proposición (criterio de conjuntos Lebesgue-medibles de medida cero)**.** *Sea* $Y \subseteq \mathbb{R}$. *Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $Y \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(Y) = 0$;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ *existe una sucesión* $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de intervalos abiertos tal que* $Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ *y* $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) = 0$. Por la construcción de Carathéodory, $\mu(Y) = \lambda^*(Y)$, donde λ^* es la medida exterior generada por la medida-longitud. Por la definición de λ^*, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos semiabiertos tal que $Y \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(C_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escribimos C_k como

$$C_k = [a_k, b_k).$$

Pongamos

$$\delta_k := b_k - a_k, \qquad U_k := (a_k - \delta_k, b_k).$$

Entonces, $C_k \subseteq U_k$, $\mu(U_k) = 2\mu(C_k)$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(U_k) < \varepsilon.$$

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tal que $Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon$. Como λ^* es creciente y subaditiva,

$$\lambda^*(Y) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lambda^*(Y) = 0$. Como ya vimos en el tema sobre la construcción de Carathéodory, esto implica que $Y \in \mathcal{C}_{\lambda^*}$, esto es, $Y \in \mathcal{F}$. Además, $\lambda(Y) = \lambda^*(Y) = 0$. $\square$

12 Ejercicio. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) : \quad a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j \le b_j,\ Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b_j) \right\}.$$

13 Ejercicio. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf \left\{ \mu(A) : \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subseteq A \right\}.$$

14 Ejercicio (la medida de Lebesgue es regular por arriba)**.** Sea $Y \in \mathcal{F}$. Demuestre que

$$\mu(Y) = \inf \left\{ \mu(A) : \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subseteq A \right\}.$$

Propiedad invariante bajo traslaciones

15 Lema. *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c, \qquad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c.$$

Además, si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{R} \setminus (A + c) = (\mathbb{R} \setminus A) + c.$$

16 Proposición (la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones)**.** *Para cualquier A en $\mathcal{F}$ y cualquier c en $\mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Demostración. 1. Fijamos c en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que para cualquier A en $\mathcal{S}$, $A + c \in \mathcal{S}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

2. Demostremos que la medida exterior λ^* es invariante bajo traslaciones. Sea $P \subseteq \mathbb{R}$. Para cualquier $\mathcal{S}$-cubierta $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ del conjunto A, tenemos que $(A_j + c)_{j\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta del conjunto $P + c$, y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(A_j + c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(A_j).$$

Luego $\lambda^*(P + c) \le \lambda^*(P)$. Como $A = (A + c) + (-c)$, también se tiene la desigualdad inversa.

3. Sea $A \in \mathcal{F}$. Mostremos que $A + c \in \mathcal{F}$. Para cualquier $P \subseteq \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^*(P \cap (A + c)) + \lambda^*(P \cap (A + c)^c) &= \lambda^*((P - c) \cap A) + \lambda^*((P - c) \cap A^c) \\ &= \lambda^*(P - c) = \lambda^*(P). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $A + c \in \mathcal{F}$.

4. La medida de Lebesgue μ coincide con la medida exterior λ^*, restringida a la σ-álgebra $\mathcal{C}_{\lambda^*}$, por eso μ es invariante bajo traslaciones. □

17 Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{F}$, $c > 0$. Demuestre que $cA \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(cA) = c\,\mu(A).$$

18 Observación. Más adelante, veremos que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles (se usa el axioma de elección).