Medida de Lebesgue unidimensional: construcción por del teorema de Carathéodory y propiedades principales

Objetivos. Aplicar el teorema de Carathéodory para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$; demostrar las propiedades principales de la medida de Lebesgue.

Requisitos. Teorema de Carathéodory.

1 Observación (semianillo de cajas semiabiertas, repaso)**.** Consideremos la colección $\mathcal{S}$ de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Recordar cómo se demuestra que $\mathcal{S}$ es un semianillo. En particular, representar la diferencia de dos intervalos semiabiertos

$$[a, b) \setminus [c, d)$$

como una unión disjunta de intervalos semiabiertos.

2 Observación (longitud de intervalos semiabiertos)**.** Definimos $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ mediante la regla: si $a, b \in \mathbb{R}$ y

$$C = [a, b),$$

entonces

$$\lambda(C) := \begin{cases} b - a, & a < b; \\ 0, & a \geq b. \end{cases}$$

Demostrar que λ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.

3 Observación (uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos)**.** Denotemos por $\mathcal{R}$ al anillo sobre $\mathbb{R}$ generado por el semianillo $\mathcal{S}$. Recuerde cómo se describen los elementos de $\mathcal{R}$.

4 Observación (longitud de uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos)**.** Recuerde cómo se extiende la premedida λ del semianillo $\mathcal{S}$ al anillo $\mathcal{R}$.

5 Observación (construcción de la medida de Lebesgue)**.** Explicar cómo se construye la medida de Lebesgue usando el teorema de Carathéodory. Denotamos por μ a la medida de Lebesgue y por $\mathcal{F}$ a la colección de los conjuntos Lebesgue-medibles sobre $\mathbb{R}$.

6 Lema. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $A = (a, b)$. Entonces $(a, b) \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu(A) = (a, b).$$

Demostración. El conjunto A se puede ver como una unión numerable creciente de intervalos semiabiertos:

$$(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{k}, b\right),$$

por eso $A \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \left(b - a + \frac{1}{k}\right) = a - b.$$ □

7 Observación. Se tienen también resultados similares para los intervalos abiertos no acotados $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(-\infty, +\infty)$.

8 Proposición. *Cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$.*

Demostración. Ya sabemos que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión finita o numerable de intervalos abiertos, y por eso pertenece a $\mathcal{F}$. Esto significa que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$, concluimos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$. □

9 Proposición (criterio de conjuntos Lebesgue-medibles de medida cero)**.** *Sea $Y \subset \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $Y \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(Y) = 0$;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tal que $Y \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) = 0$. Por la construcción de Carathéodory, $\mu(Y) = \lambda^*(Y)$, donde λ^* es la medida exterior generada por la medida-longitud. Por la definición de λ^*, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ intervalos semiabiertos tal que $Y \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(C_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escribimos C_k como

$$C_k = [a_k, b_k).$$

Pongamos

$$\delta_k := b_k - a_k, \qquad U_k := (a_k - \delta_k, b_k).$$

Entonces $C_k \subset U_k$, $\mu(U_k) = 2\mu(C_k)$ y

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(U_k) < \varepsilon.$$

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple (b). Para cada p en $\mathbb{N}$ encontramos una sucesión $(U_{p,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tal que

$$Y \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{p,j}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_{p,j}) < \frac{1}{p}.$$

Pongamos

$$V_p \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{p,j}, \qquad W \coloneqq \bigcap_{p\in\mathbb{N}} V_p.$$

Como $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, tenemos que $V_p \in \mathcal{F}$ para cada p y $W \in \mathcal{F}$. Aplicando la propiedad σ-subaditiva de la medida μ, obtenemos que $\mu(V_p) < 1/p$ para cada p en $\mathbb{N}$. Luego, aplicando la propiedad monótona de μ, obtenemos que $\mu(W) < 1/p$ para cada p en $\mathbb{N}$, así que $\mu(W) = 0$. Como $Y \subset W$ y la medida μ es completa, concluimos que $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) = 0$. □

10 Ejercicio. Sea $Y \subset \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \colon \quad a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j \le b_j,\ Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_j, b_j) \right\}.$$

11 Ejercicio. Sea $Y \subset \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf\{\mu(A)\colon \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subset A\}.$$

12 Ejercicio (la medida de Lebesgue es regular por arriba)**.** Sea $Y \in \mathcal{F}$. Demuestre que

$$\mu(Y) = \inf\{\mu(A)\colon \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subset A\}.$$

Propiedad invariante bajo traslaciones

13 Lema. *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c, \qquad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (A_j + c) = \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \right) + c.$$

Además, si $A \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{R} \setminus (A + c) = (\mathbb{R} \setminus A) + c.$$

14 Proposición (la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones)**.** *Para cualquier A en $\mathcal{F}$ y cualquier c en $\mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Demostración. 1. Fijamos c en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que para cualquier A en $\mathcal{S}$, $A + c \in \mathcal{S}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

2. Si $A \in \mathcal{R}$, es decir, si A es una unión finita disjunta de intervalos semiabiertos $B_1, \ldots, B_m$, entonces $A+c$ es la unión de los conjuntos disjuntos B_j+c con $j \in \{1, \ldots, m\}$. Aplicando el inciso 1 concluimos que $A + c \in \mathcal{R}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

3. Demostremos que la medida exterior λ^* es invariante bajo traslaciones. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Para cualquier $\mathcal{R}$-cubierta $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ del conjunto A, tenemos que $(B_j + c)_{j\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{R}$-cubierta del conjunto $A + c$, y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j + c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j).$$

Luego $\lambda^*(A + c) \le \lambda^*(A)$. Como $A = (A + c) - c$, también se tiene la desigualdad inversa.

4. Sea $A \in \mathcal{F}$. Mostremos que $A + c \in \mathcal{F}$. Para cualquier $P \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^*(P \cap (A + c)) + \lambda^*(P \cap (A + c)^c) &= \lambda^*((P - c) \cap A) + \lambda^*((P - c) \cap A^c) \\ &= \lambda^*(P - c) = \lambda^*(P). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $A + c \in \mathcal{F}$.

5. La medida de Lebesgue μ coincide con la medida exterior λ^*, restringida a la σ-álgebra $\mathcal{C}_{\lambda^*}$, por eso μ es invariante bajo traslaciones. □

15 Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{F}$, $c > 0$. Demuestre que $cA \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(cA) = c\,\mu(A).$$

16 Ejercicio. Demuestre que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles (se usa el axioma de elección).