Medida de Lebesgue unidimensional: construcción por del teorema de Carathéodory y propiedades principales

Objetivos. Aplicar el teorema de Carathéodory para construir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$; demostrar las propiedades principales de la medida de Lebesgue.

Requisitos. La medida exterior asociada a una premedida definida en un anillo, conjuntos Carathéodory-medibles respecto a una medida exterior, teorema de Carathéodory, la longitud de intervalos semiabiertos $[a, b)$ es una premedida.

1 Repaso (el semianillo de intervalos semiabiertos acotados)**.** Consideremos la colección $\mathcal{S}$ de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Recuerde cómo se demuestra que $\mathcal{S}$ es un semianillo. En particular, represente la diferencia de dos intervalos semiabiertos

$$[a, b) \setminus [c, d)$$

como una unión disjunta de intervalos semiabiertos.

2 Repaso (la longitud de intervalos semiabiertos)**.** Definimos $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$,

$$\lambda\big([a, b)\big) \coloneqq b - a.$$

Sabemos que λ es una premedida sobre $\mathcal{S}$.

3 Repaso (uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos acotados)**.** Denotemos por $\mathcal{R}$ al anillo sobre $\mathbb{R}$ generado por el semianillo $\mathcal{S}$. Ya sabemos que los elementos de $\mathcal{R}$ se pueden escribir de la siguiente forma:

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j), \tag{1}$$

donde $a_j \leq b_j$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ y $b_j \leq a_{j+1}$ para cada j en $\{1, \ldots, m-1\}$.

4 Repaso (la longitud de uniones finitas disjuntas de intervalos semiabiertos)**.** La premedida λ se extiende de manera única al anillo $\mathcal{R}$. Si A es de la forma (1),

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j).$$

Se puede demostrar que la definición es consistente (la suma no depende de la partición de A en elementos de $\mathcal{S}$).

5 Repaso (la medida exterior inducida por λ)**.** Definimos $\lambda^*\colon 2^{\mathbb{R}} \to [0,+\infty]$ mediante la siguiente regla. Para cada $P \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(P) \coloneqq \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)\colon \quad (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}} \quad \wedge \quad P \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right\}.$$

Como cada elemento de $\mathcal{R}$ es una unión finita de elementos de $\mathcal{S}$, se tiene también otra fórmula equivalente:

$$\lambda^*(P) \coloneqq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)\colon \quad (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \quad \wedge \quad P \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right\}.$$

Sabemos que λ^* es una medida exterior.

6 Definición (conjuntos Carathéodory-medibles respecto a λ^*)**.** En el contexto de la medida exterior λ^*, aplicamos la construcción de Carathéodory. Denotamos por $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ a la colección de los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a λ^*:

$$\mathcal{C}_{\lambda^*} \coloneqq \Big\{Y \subseteq \mathbb{R}\colon \quad \forall P \in 2^{\mathbb{R}} \quad \lambda^*(P\cap A) + \lambda^*(P \setminus A) = \lambda^*(P)\Big\}.$$

7 Repaso. De acuerdo con los teoremas generales sobre la construcción de Carathéodory, $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ es una σ-álgebra y la restricción de λ^* a $\mathcal{C}_{\lambda^*}$ es una medida completa.

8 Definición (la σ-álgebra de Lebesgue y la medida de Lebesgue)**.** Definimos la σ-álgebra de Lebesgue como la colección de los conjuntos Carathéodory-medibles respecto a la medida exterior λ^*. La denotemos por $\mathcal{F}$. Definimos la medida de Lebesgue como la restricción de λ^* a $\mathcal{F}$. La denotemos por $\mu_{\mathbb{R}}$ o simplemente por μ.

$$\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{C}_{\lambda^*}, \qquad \mu \coloneqq \lambda^* \restriction_{\mathcal{F}}.$$

9 Lema. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, entonces $(a,b) \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu\big((a,b)\big) = b - a.$$

Demostración. El conjunto A se puede ver como una unión numerable creciente de intervalos semiabiertos:

$$(a,b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{k}, b\right),$$

por eso $A \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \left(b - a + \frac{1}{k}\right) = a - b. \qquad \square$$

10 Ejercicio (los intervalos abiertos no acotados y su medida de Lebesgue)**.** Demuestre que los intervalos abiertos no acotados son Lebesgue-medible y tienen medida infinita.

- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces
$$(a, +\infty) \in \mathcal{F}, \qquad \mu\Big((a, +\infty)\Big) = +\infty.$$
- Si $b \in \mathbb{R}$, entonces
$$\mu\Big((-\infty, b)\Big) = +\infty.$$
- $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ y $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$.

11 Proposición. *Cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$.*

Demostración. Ya sabemos que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión finita o numerable de intervalos abiertos, y por eso pertenece a $\mathcal{F}$. Esto significa que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ-álgebra que contiene la topología $\tau_{\mathbb{R}}$, concluimos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$. □

12 Proposición (criterio de conjuntos Lebesgue-medibles de medida cero)**.** *Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) = 0$;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tal que $Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) = 0$. Por la construcción de Carathéodory, $\mu(Y) = \lambda^*(Y)$, donde λ^* es la medida exterior generada por la medida-longitud. Por la definición de λ^*, para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos semiabiertos tal que $Y \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ y
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(C_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Escribimos C_k como
$$C_k = [a_k, b_k).$$
Pongamos
$$\delta_k \coloneqq b_k - a_k, \qquad U_k \coloneqq (a_k - \delta_k, b_k).$$
Entonces, $C_k \subseteq U_k$, $\mu(U_k) = 2\mu(C_k)$ y
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(U_k) < \varepsilon.$$
(b)⇒(a). Supongamos que se cumple (b). Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tal que $Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon$. Como λ^* es creciente y subaditiva,
$$\lambda^*(Y) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(U_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) < \varepsilon.$$
Por lo tanto, $\lambda^*(Y) = 0$. Como ya vimos en el tema sobre la construcción de Carathéodory, esto implica que $Y \in \mathcal{C}_{\lambda^*}$, esto es, $Y \in \mathcal{F}$. Además, $\lambda(Y) = \lambda^*(Y) = 0$. □

Regularidad de la medida de Lebesgue

13 Ejercicio. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\colon \quad a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j \leq b_j,\ Y \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_j, b_j)\right\}.$$

14 Ejercicio. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf\big\{\mu(A)\colon \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subseteq A\big\}.$$

15 Proposición (la medida de Lebesgue es regular por arriba)**.** *Sea $Y \in \mathcal{F}$. Demuestre que*

$$\mu(Y) = \inf\big\{\mu(A)\colon \quad A \in \tau_{\mathbb{R}}, \quad Y \subseteq A\big\}.$$

Demostración. Se sigue del ejercicio anterior. □

16 Proposición (la medida de Lebesgue es regular por abajo)**.** *Si $A \in \tau_{\mathbb{R}}$, entonces*

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(K)\colon \quad K \subseteq A,\ K \text{ es compacto}\big\}.$$

Demostración. Idea: representar A como una unión finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos. □

17 Proposición (aproximación por abajo de la medida de conjuntos medibles con medida finita)**.** *Si $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) < +\infty$, entonces*

$$\mu(Y) = \sup\big\{\mu(K)\colon \quad K \subseteq Y,\ K \text{ es compacto}\big\}.$$

Demostración. Ejercicio (usar algunos de los resultados anteriores). □

18 Proposición. *μ es una medida de Radon.*

Propiedad invariante bajo traslaciones

19 Lema. *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_j + c) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) + c, \qquad \bigcap_{j\in\mathbb{N}}(A_j + c) = \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) + c.$$

Además, si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{R} \setminus (A + c) = (\mathbb{R} \setminus A) + c.$$

20 Proposición (la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones)**.** *Para cualquier A en $\mathcal{F}$ y cualquier c en $\mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{F}$ y*

$$\mu(A + c) = \mu(A).$$

Demostración. 1. Fijamos c en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que para cualquier A en $\mathcal{S}$, $A + c \in \mathcal{S}$ y $\lambda(A + c) = \lambda(A)$.

2. Demostremos que la medida exterior λ^* es invariante bajo traslaciones. Sea $P \subseteq \mathbb{R}$. Para cualquier $\mathcal{S}$-cubierta $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ del conjunto A, tenemos que $(A_j + c)_{j\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{A}$-cubierta del conjunto $P + c$, y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(A_j + c) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(A_j).$$

Luego $\lambda^*(P + c) \leq \lambda^*(P)$. Como $A = (A + c) + (-c)$, también se tiene la desigualdad inversa.

3. Sea $A \in \mathcal{F}$. Mostremos que $A + c \in \mathcal{F}$. Para cualquier $P \subseteq \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda^*(P \cap (A + c)) + \lambda^*(P \cap (A + c)^c) &= \lambda^*((P - c) \cap A) + \lambda^*((P - c) \cap A^c) \\ &= \lambda^*(P - c) = \lambda^*(P).\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $A + c \in \mathcal{F}$.

4. La medida de Lebesgue μ coincide con la medida exterior λ^*, restringida a la σ-álgebra $\mathcal{C}_{\lambda^*}$, por eso μ es invariante bajo traslaciones. □

21 Ejercicio. Sean $A \in \mathcal{F}$, $c > 0$. Demuestre que $cA \in \mathcal{F}$ y

$$\mu(cA) = c\,\mu(A).$$

22 Observación. Más adelante, veremos que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles (se usa el axioma de elección).