

Normas en \mathbb{C}^n y su equivalencia entre si (un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

16 de octubre de 2020

- 1 Introducción
- 2 Normas en \mathbb{C}^n
- 3 Comparación de normas (repaso)
- 4 Equivalencia de todas las normas en \mathbb{C}^n
- 5 Subespacios de dimensión finita

Objetivos

- Recordar la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n .
- Conocer ejemplos de otras normas en \mathbb{C}^n .
- Demostrar que todas las normas en \mathbb{C}^n son equivalentes entre si.

Prerrequisitos

- Comparación y equivalencia de normas.
- Completez de \mathbb{C} .
- Espacios compactos, conjuntos compactos en \mathbb{C}^n .
- La imagen de un conjunto compacto bajo una función continua.

Aplicaciones

- Propiedades de subespacios de dimensión finita en espacios normados.
- Propiedades de listas de vectores finitas en espacios normados.
- Propiedades de operadores lineales de rango finito.
- Propiedades de operadores lineales compactos.

Las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n (repass)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n (repass)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n (repass)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma en \mathbb{C}^n .

Las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n (repass)

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|a\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (a \in \mathbb{C}^n).$$

Para $p = +\infty$,

$$\|a\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces $\|\cdot\|_p$ es una norma en \mathbb{C}^n .

Idea de demostración para $1 \leq p \leq +\infty$: Young, Hölder, Minkowski (de la misma manera como en ℓ^p o en L^p).

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\| \cdot \|_p$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces el espacio $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_p)$ es de Banach.

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Proposición

Sea $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ es de Banach.

Primera demostración: razonar de la misma manera como en ℓ^p .

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\| \cdot \|_p$

Segunda demostración: usar la completitud de ℓ^p y un encaje de \mathbb{C}^n en ℓ^p .

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Segunda demostración: usar la completitud de ℓ^p y un encaje de \mathbb{C}^n en ℓ^p .

I. Demostrar que el siguiente conjunto es un subespacio cerrado de ℓ^p :

$$\mathcal{F}_n := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k > n \quad a_k = 0\}.$$

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Segunda demostración: usar la completitud de ℓ^p y un encaje de \mathbb{C}^n en ℓ^p .

I. Demostrar que el siguiente conjunto es un subespacio cerrado de ℓ^p :

$$\mathcal{F}_n := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall k > n \quad a_k = 0\}.$$

II. Definimos $J: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{F}_n$,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

Demostrar que J es un biyección isométrica, si consideramos \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$ y \mathcal{F}_n con la restricción de la norma de $\|\cdot\|_p$ de ℓ^p .

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

Lema

Sea $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces

$$(a_s)_{s \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \iff \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad ((a_s)_k)_{s \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy.}$$

La completitud del espacio \mathbb{C}^n con la norma $\|\cdot\|_p$

Tercera demostración. Idea: las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes en el espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ se describen por componentes.

Lema

Sea $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces

$$(a_s)_{s \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \iff \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad ((a_s)_k)_{s \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy.}$$

Lema

Sea $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C}^n , y sea $b \in \mathbb{C}^n$.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|a_s - b\|_p = 0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (a_s)_k = b_k.$$

Otras normas en \mathbb{C}^n

Hay muchas otras normas en \mathbb{C}^n . Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^n (k+1)|a_k|,$$

Otras normas en \mathbb{C}^n

Hay muchas otras normas en \mathbb{C}^n . Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^n (k+1)|a_k|,$$

$$N_2(a) := \|a\|_\infty + 7\|a\|_2,$$

Otras normas en \mathbb{C}^n

Hay muchas otras normas en \mathbb{C}^n . Por ejemplo,

$$N_1(a) := \sum_{k=1}^n (k+1)|a_k|,$$

$$N_2(a) := \|a\|_\infty + 7\|a\|_2,$$

$$N_3(a) := \max\{|a_1| + |a_2|, |a_2| + |a_3|, \dots, |a_{n-1}| + |a_n|\}.$$

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria \preceq es transitiva y reflexiva.

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V .

$$N_1 \preceq N_2 \iff \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria \preceq es transitiva y reflexiva.

Observación. Si $N_1 \leq N_2$, entonces $N_1 \preceq N_2$.

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V .

$$N_1 \asymp N_2 \iff (N_1 \preceq N_2) \wedge (N_2 \preceq N_1).$$

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V .

$$N_1 \asymp N_2 \iff (N_1 \preceq N_2) \wedge (N_2 \preceq N_1).$$

Ejercicio. Demostrar que \asymp es una relación de equivalencia.

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio \mathbb{C}^n , $\|\cdot\|_1 \asymp \|\cdot\|_2$.

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio \mathbb{C}^n , $\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para a en \mathbb{C}^n ,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|a\|_2.$$

Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{C}^n

Ejercicio. En el espacio \mathbb{C}^n consideramos las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$, donde

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

I. Demostrar que $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.

II. Demostrar directamente que $\|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q$, es decir, encontrar una constante $C_{n,p,q} > 0$ tal que

$$\forall a \in \mathbb{C}^n \quad \|a\|_p \leq C_{p,q,n} \|a\|_q.$$

Sugerencia para II: aplicar de manera apropiada la desigualdad de Hölder.

Observación. Más adelante, demostraremos de manera no constructiva que cualesquiera dos normas en \mathbb{C}^n son equivalentes.

Compactos en \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n

Proposición (criterio de subconjuntos compactos en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (o $A \subseteq \mathbb{C}^n$). Entonces A es compacto \iff

Compactos en \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n

Proposición (criterio de subconjuntos compactos en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (o $A \subseteq \mathbb{C}^n$). Entonces A es compacto $\iff A$ es cerrado y acotado.

Proposición (el mínimo y máximo de un conjunto compacto no vacío en \mathbb{R})

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, A compacto, $A \neq \emptyset$. Entonces

$$\inf(A) \in A, \quad \sup(A) \in A.$$

Funciones continuas, definidas en compactos

Proposición (la imagen de un compacto bajo una función continua)

Sean X, Y espacios topológicos, X compacto, y sea $f \in C(X, Y)$.

Entonces $f[X]$ es compacto.

Funciones continuas, definidas en compactos

Proposición (la imagen de un compacto bajo una función continua)

Sean X, Y espacios topológicos, X compacto, y sea $f \in C(X, Y)$.

Entonces $f[X]$ es compacto.

Corolario (el mínimo y máximo de una función real continua en un compacto)

Sea X un espacio topológico compacto no vacío, y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Entonces

$$\inf f[X] \in f[X], \quad \sup f[X] \in f[X].$$

En otras palabras, existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = \inf f[X]$, $f(y) = \sup f[X]$.

La desigualdad inversa del triángulo para las normas (repass)

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio normado. Demostrar que para cada a, b en V ,

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b).$$

Sugerencia: $|t| \leq u \iff -u \leq t \leq u.$

Teorema

Sea N una norma en \mathbb{C}^n . Entonces $N \asymp \|\cdot\|_2$.

1. Demostremos que $N \preceq \|\cdot\|_2$.

Denotemos por e_k al k -ésimo vector de la base canónica: $e_k := [\delta_{k,r}]_{r=1}^n$. Sea

$$M := \left(\sum_{k=1}^n N(e_k)^2 \right)^{1/2}.$$

Para cada a en \mathbb{C}^n ,

$$N(a) = N\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^n |a_k| N(e_k) \leq M \|a\|_2.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio \mathbb{C}^n de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b) \leq M \|a - b\|_2.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio \mathbb{C}^n de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b) \leq M \|a - b\|_2.$$

3. La función N alcanza su valor mínimo en la esfera euclídeana.

$$S := \{a \in \mathbb{C}^n : \|a\|_2 = 1\}.$$

2. Demostremos que N es continua en $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Dotamos el dominio \mathbb{C}^n de la función N de la norma $\|\cdot\|_2$.

Entonces N es Lipschitz continua:

$$|N(a) - N(b)| \leq N(a - b) \leq M \|a - b\|_2.$$

3. La función N alcanza su valor mínimo en la esfera euclídeana.

$$S := \{a \in \mathbb{C}^n : \|a\|_2 = 1\}.$$

Como N es continua y S es un compacto, existe x en S tal que $N(x) = \inf N[S]$.

Denotamos $N(x)$ por C . Como $x \neq 0_n$ y N es una norma, tenemos $C > 0$.

4. Demostremos que $\|\cdot\| \preceq \|\cdot\|_2 \preceq N \|\cdot\|$.

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en \mathbb{C}^n ,

$$\|y\|_2 = 1 \quad \implies \quad N(y) \geq C.$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en \mathbb{C}^n ,

$$\|y\|_2 = 1 \quad \implies \quad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos

$$y = \frac{1}{\|x\|_2} x \quad \text{y obtenemos}$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en \mathbb{C}^n ,

$$\|y\|_2 = 1 \quad \implies \quad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos

$$y = \frac{1}{\|x\|_2} x \quad \text{y obtenemos}$$

$$N(x) = N(\|x\|_2 y) = \|x\|_2 N(y) \geq C \|x\|_2,$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en \mathbb{C}^n ,

$$\|y\|_2 = 1 \quad \implies \quad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $y = \frac{1}{\|x\|_2} x$ y obtenemos

$$N(x) = N(\|x\|_2 y) = \|x\|_2 N(y) \geq C \|x\|_2,$$

esto es,

$$\|x\|_2 \leq \frac{1}{C} N(x).$$

4. Demostremos que $\|\cdot\|_2 \preceq N$.

Ya vimos que para cada y en \mathbb{C}^n ,

$$\|y\|_2 = 1 \quad \implies \quad N(y) \geq C.$$

Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0_n$, entonces pongamos $y = \frac{1}{\|x\|_2} x$ y obtenemos

$$N(x) = N(\|x\|_2 y) = \|x\|_2 N(y) \geq C \|x\|_2,$$

esto es,

$$\|x\|_2 \leq \frac{1}{C} N(x).$$

Esta desigualdad también se cumple para $x = 0_n$.



Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en \mathbb{C}^n . Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en \mathbb{C}^n . Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración. Sabemos que

$$N_1 \asymp \|\cdot\|_2, \quad N_2 \asymp \|\cdot\|_2.$$

Corolarios

Hemos demostrado que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 dos normas en \mathbb{C}^n . Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración. Sabemos que

$$N_1 \asymp \|\cdot\|_2, \quad N_2 \asymp \|\cdot\|_2.$$

Usamos el hecho que \asymp es una relación de equivalencia. □

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Todas las normas en \mathbb{C}^n inducen la misma topología.

Corolarios

Hemos demostrado el teorema que cualquier norma en \mathbb{C}^n es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Corolario

Todas las normas en \mathbb{C}^n inducen la misma topología.

Corolario

Sea N una norma en \mathbb{C}^n . Entonces (\mathbb{C}^n, N) es de Banach.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea b_1, \dots, b_n una base en V .

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea b_1, \dots, b_n una base en V .

Definimos $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$, $\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, \quad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como b_1, \dots, b_n es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea b_1, \dots, b_n una base en V .

Definimos $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$, $\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, \quad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como b_1, \dots, b_n es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en \mathbb{C}^n . Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea b_1, \dots, b_n una base en V .

Definimos $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$, $\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, \quad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como b_1, \dots, b_n es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en \mathbb{C}^n . Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Como $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo, (\mathbb{C}^n, ν) es completo.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Demostración. Sea N la norma en V y sea b_1, \dots, b_n una base en V .

Definimos $T: \mathbb{C}^n \rightarrow V$, $\nu: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$T(\alpha) := \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k, \quad \nu(\alpha) := N(T(\alpha)) \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Como b_1, \dots, b_n es una base, T es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Es fácil ver que ν es una norma en \mathbb{C}^n . Por el teorema, $\nu \asymp \|\cdot\|_2$.

Como $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo, (\mathbb{C}^n, ν) es completo.

Como $T: (\mathbb{C}^n, \nu) \rightarrow (V, N)$ es una isometría biyectiva, (V, N) es completo. □

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$. Por la proposición anterior, este espacio es completo.

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Por la proposición anterior, este espacio es completo.

Por consecuencia, W es cerrado en V . □