Comparación de normas

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

18 de octubre de 2022

Objetivos

- Definir las relaciones $\preceq$ y $\asymp$ para normas en un espacio vectorial.
- Mostrar que la comparación de normas está relacionada con la comparación de topologías.
- Aplicar estos conceptos a la convergencia de sucesiones y sucesiones de Cauchy.

Prerrequisitos

- Espacios normados.
- Comparación de topologías.

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

Observación. Si $N_1 \leq N_2$, entonces $N_1 \preceq N_2$.

Comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \le C\, N_2(v).$$

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\preceq$ es transitiva y reflexiva.

Observación. Si $N_1 \le N_2$, entonces $N_1 \preceq N_2$.

Observación. Podríamos trabajar con las seminormas, en vez de las normas.

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Ejercicio. Demostrar que $\asymp$ es una relación de equivalencia.

Equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Ejercicio. Demostrar que $\asymp$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio. Demostrar que

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C_1, C_2 > 0 \qquad \forall v \in V \qquad C_1\, N_1(v) \leq N_2(v) \leq C_2\, N_1(v).$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\quad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\quad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 =$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| =$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\qquad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2.$

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1 \leq$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)^{1/2}$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\quad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} =$$

Ejemplo de comparación de normas

En el espacio $\mathbb{C}^n$, $\quad \|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2$.

En efecto, para cada a en $\mathbb{C}^n$,

$$\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot 1 \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|a\|_2.$$

Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio. En el espacio $\mathbb{C}^n$ consideramos las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$, donde

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Demostrar directamente que

$$\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p, \qquad \|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q.$$

Equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio. En el espacio $\mathbb{C}^n$ consideramos las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$, donde

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Demostrar directamente que

$$\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p, \qquad \|\cdot\|_p \preceq \|\cdot\|_q.$$

Observación. En una de las siguientes clases demostraremos que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio ℓ^1 consideramos las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio ℓ^1 consideramos las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Mostremos que $\|\cdot\|_1 \not\preceq \|\cdot\|_\infty$.

Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio ℓ^1 consideramos las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Mostremos que $\|\cdot\|_1 \not\precsim \|\cdot\|_\infty$.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := (\underbrace{1,\ldots,1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{m} e_k.$$

Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio ℓ^1 consideramos las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Mostremos que $\|\cdot\|_1 \not\asymp \|\cdot\|_\infty$.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := (\underbrace{1,\ldots,1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{m} e_k. \qquad \frac{\|s_m\|_1}{\|s_m\|_\infty} = \frac{m}{1} = m.$$

Un ejemplo de normas no equivalentes

En el espacio ℓ^1 consideramos las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Mostremos que $\|\cdot\|_1 \not\asymp \|\cdot\|_\infty$.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := (\underbrace{1,\ldots,1}_{m \text{ veces}}, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=1}^{m} e_k. \qquad \frac{\|s_m\|_1}{\|s_m\|_\infty} = \frac{m}{1} = m.$$

Por lo tanto, no existe $C > 0$ tal que

$$\forall a \in \ell^1 \qquad \|a\|_1 \le C\,\|a\|_\infty.$$

Ejercicio. Sean p, q tales que

$$1 \leq p < q \leq +\infty.$$

Construir una sucesión de sucesiones $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, donde $a_m \in \ell^1$, tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|a_m\|_p}{\|a_m\|_q} = +\infty.$$

Concluir que en el espacio ℓ^1 las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ no son equivalentes.

Comparación de normas y topologías

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

Denotamos de la siguiente manera las bolas correspondientes:

$$B_1(a,r) := \{v \in V\colon\ N_1(v-a) < r\}, \qquad B_2(a,r) := \{v \in V\colon\ N_2(v-a) < r\}.$$

Sean τ_1 la topología inducida por N_1 y τ_2 la topología inducida por N_2.

Comparación de normas y topologías

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

Denotamos de la siguiente manera las bolas correspondientes:

$$B_1(a,r) := \{v \in V : \ N_1(v-a) < r\}, \qquad B_2(a,r) := \{v \in V : \ N_2(v-a) < r\}.$$

Sean τ_1 la topología inducida por N_1 y τ_2 la topología inducida por N_2.

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $N_1 \preceq N_2$,

(b) para cada $r_1 > 0$ existe $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$.

(c) $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$.

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2)$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) =$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x +$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2)$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq$$

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1)$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) =$$

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1)$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1) \subseteq$$

Demostremos solamente una implicación, (b)⇒(c). Las demás son ejercicios.

(b)⇒(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1) \subseteq A.$$

Demostremos solamente una implicación, (b)$\Rightarrow$(c). Las demás son ejercicios.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que

$$\forall r_1 > 0 \qquad \exists r_2 > 0 \qquad B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1).$$

Sea $A \in \tau_1$. Demostremos que $A \in \tau_2$.

Sea $x \in A$. Por la definición de τ_1, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B_1(x, r_1) \subseteq A$.

Usando la condición (b) encontramos $r_2 > 0$ tal que $B_2(0_V, r_2) \subseteq B_1(0_V, r_1)$. Luego

$$B_2(x, r_2) = x + B_2(0_V, r_2) \subseteq x + B_1(0_V, r_1) = B_1(x, r_1) \subseteq A.$$

Como x es un punto arbitrario de A, hemos demostrado que $A \in \tau_2$.

Corolario

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.
Denotemos por τ_1 y τ_2 las topologias correspondientes. Entonces

$$N_1 \asymp N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_1 = \tau_2.$$

Comparación de normas y sucesiones convergentes

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial, N_1, N_2 normas en V, $N_1 \preceq N_2$.
Sean $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, $b \in V$. Demostrar que

$$\lim_{j\to\infty} N_2(a_j - b) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{j\to\infty} N_1(a_j - b) = 0.$$

Comparación de normas y sucesiones de Cauchy

Ejercicio.

Sea V un espacio vectorial, sean N_1, N_2 normas en V, $N_1 \preceq N_2$.

Sea $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy respecto a N_2.

Demostrar que esta sucesión es de Cauchy respecto a N_1.

Comparación de normas y sucesiones de Cauchy

Ejercicio.

Sea V un espacio vectorial, sean N_1, N_2 normas en V, $N_1 \preceq N_2$.

Sea $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy respecto a N_2.

Demostrar que esta sucesión es de Cauchy respecto a N_1.

Ejercicio.

Sea V un espacio vectorial y sean N_1, N_2 normas en V.

Supongamos que $N_1 \asymp N_2$ y el espacio (V, N_1) sea completo.

Demostrar que (V, N_2) es completo.