Espacios normados, repaso rápido

(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de septiembre de 2020

Objetos principales que se estudian en análisis funcional:

- espacios vectoriales topológicos, especialmente espacios normados,
- operadores lineales continuos que actúan en estos espacios,
- álgebras de operadores.

Algunas clases de espacios vectoriales topológicos

Consideramos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

- Espacios con producto interno.

  Si son completos, se llaman espacios de Hilbert.
- Espacios normados.

  Si son completos, se llaman espacios de Banach.
- Espacios vectoriales con métrica invariante.

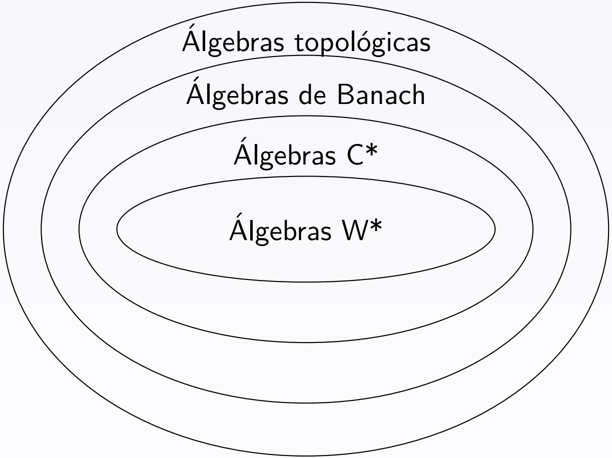
  Si son completos, se llaman espacios de Fréchet.
- Espacios localmente convexos.
- Espacios vectoriales topológicos.

Estudio de operadores lineales (teoría de operadores)

Dado un operador lineal, se estudian sus características más importantes:

- la continuidad (¿es continuo o no?),
- la norma (calcular o al menos acotar),
- ¿es compacto o no?
- la invertibilidad (¿es invertible o no?),
- ¿es de Fredholm o no?
- el espectro,
- el espectro esencial.

Algunas clases de álgebras de operadores



Conección de análisis funcional con otras áreas de matemáticas

Prerrequisitos:

- álgebra lineal,
- cálculo,
- teoría de espacios métricos,
- análisis real,
- análisis complejo,
- topología general.

Conección de análisis funcional con otras áreas de matemáticas

Prerrequisitos:

- álgebra lineal,
- cálculo,
- teoría de espacios métricos,
- análisis real,
- análisis complejo,
- topología general.

Aplicaciones:

- análisis de ecuaciones diferenciales,
- varios modelos de mecánica cuántica,
- análisis de métodos numéricos,
- análisis armónico (análisis de Fourier),
- teoría de procesos estocásticos,
- algunos métodos de machine learning,
- geometría no conmutativa.

Definición de la norma

Sea V un espacio vectorial complejo.

Una función $N\colon V \to [0, +\infty)$ se llama norma en V si

(N1) es subaditiva:

$$\forall a, b \in V \qquad N(a+b) \le N(a) + N(b),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda a) = |\lambda| N(a),$$

(N3) es estrictamente positiva:

$$\forall a \in V \setminus \{0_V\} \qquad N(a) > 0.$$

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

Definición del espacio normado

Un par (V, N) se llama espacio normado complejo,
si V es un espacio vectorial complejo y N es una norma en V.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

Estructuras matemáticas que contiene un espacio normado:

- espacio vectorial, grupo abeliano,
- espacio métrico (lo repasaremos), espacio topológico,
- grupo abeliano topológico (lo veremos), espacio vectorial topológico (lo veremos).

Corolarios triviales de la definición de la norma

- $N(0_V) = 0$.
- Para cada a en V, $\qquad N(-a) = N(a)$.

Corolarios triviales de la definición de la norma

- $N(0_V) = 0$.
- Para cada a en V, $\qquad N(-a) = N(a)$.

La condición (N3) se puede sustituir por la siguiente:

$$\forall a \in V \qquad N(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0_V.$$

La métrica inducida por una norma

Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces d es una métrica, esto es,

(D1) $d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b)$ para cada $a, b, c \in V$,

(D2) $d(a, b) = d(b, a)$ para cada $a, b \in V$,

(D3) $d(a, a) = 0$ para cada a en V,

(D4) si $a, b \in V$ y $d(a, b) = 0$, entonces $a = b$.

La métrica inducida por una norma

Ejercicio. Recordar la demostración.

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\text{(N1)} & \|v+w\| \le \|v\| + \|w\|, \\
\text{(N2)} & \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|, \\
\text{(N3)} & \|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0_V. \\
\\
& \quad d(a,b) := \|a-b\|.
\end{array}}
\quad \Longrightarrow \quad
\boxed{\begin{array}{ll}
\text{(D1)} & d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b), \\
\text{(D2)} & d(a,b) = d(b,a), \\
\text{(D3)} & d(a,a) = 0, \\
\text{(D4)} & d(a,b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b.
\end{array}}
$$

Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces d es invariante bajo traslaciones simultáneas de dos argumentos y homogénea absoluta bajo dilataciones simultáneas de dos argumentos:

$$\forall a, b, c \in V \qquad d(a + c, b + c) = d(a, b),$$

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b).$$

Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo y sea d una métrica en V tal que

$$\forall a, b, c \in V \qquad d(a + c, b + c) = d(a, b),$$

$$\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b).$$

Demostrar que existe una única norma $\| \cdot \|$ que induce d.

Propiedades de bolas en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\} \qquad (a \in X, \ r > 0).$$

- Sobre bolas concéntricas:

  si $a \in X$, $0 < r_1 < r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.

- Sobre una bola contenida en otra:

  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.

- Sobre bolas disjuntas:

  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 < d(a_1, a_2)$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0,r), \qquad B(0,r) = rB(0,1), \qquad B(a,r) = a + rB(0,1).$$

Recordemos que

$$a + Y := \{v \in V : \; v - a \in Y\}, \qquad rY := \left\{v \in V : \; \frac{1}{r} v \in Y\right\}.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

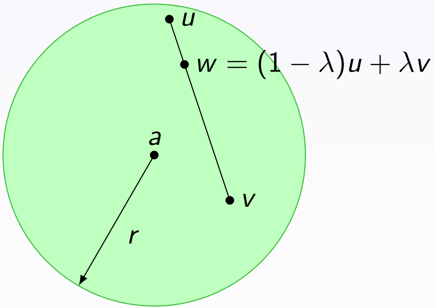
Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$w := (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

Mostremos que

$$\|w - a\| < r.$$



Propiedades de bolas en un espacio normado

Proposición (convexidad de bolas en un espacio normado)

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Demostración. Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| \\
&< (1 - \lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}
$$

Esto significa que $w \in B(a, r)$. □

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $V \neq \{0_V\}$.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_1, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad \|a_1 - a_2\| + r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 + r_2 \le \|a_1 - a_2\|.
\end{aligned}
$$

Se recomienda demostrar estas propiedades en forma contrapositiva:

$$r_1 > r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(a_1, r_1) \setminus B(a_1, r_2) \neq \emptyset.$$

En cada caso hay que construir un vector.

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

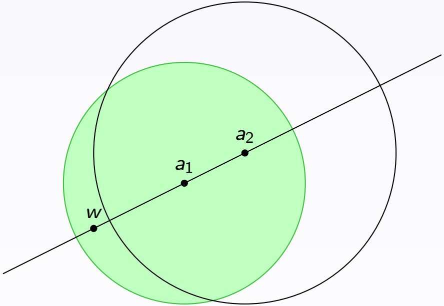
$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

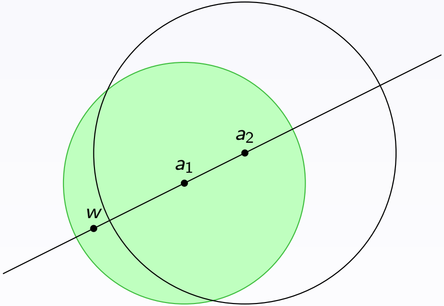
Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2,$$

tal que

$$\|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| \geq r_2.$$

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A\colon V \times V \to V, \qquad A(u,v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M\colon \mathbb{C} \times V \to V, \qquad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A\colon V \times V \to V, \qquad A(u, v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M\colon \mathbb{C} \times V \to V, \qquad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sea τ una topología en en V. Se dice que (V, τ) es un espacio vectorial topológico si A y M son continuas.

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| =$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| =$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\|$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\|$$
$$\leq$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \end{aligned}$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \end{aligned}$$

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma. Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

Continuidad de la adición. Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| =$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| = \|\eta u - \xi a\| =$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq\end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}
\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\
&\leq |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\
&=
\end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < \end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}
\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\
&\le |\eta|\, \|u - a\| + |\eta - \xi|\, \|a\| \le (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\
&= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta <
\end{aligned}$$

EN es EVT

Continuidad de la multiplicación por escalares.

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\le |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \le (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

EN es EVT

Corolario (continuidad de las operaciones vectoriales, en términos de sucesiones)

Sea V un espacio vectorial normado. Supongamos que

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}, \qquad (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}, \qquad (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},$$

$a, b \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{k\to\infty} u_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} v_k = b, \qquad \lim_{k\to\infty} \eta_k = \xi.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} (u_k + v_k) = a + b, \qquad \lim_{k\to\infty} (\eta_k u_k) = \xi a.$$