

El cociente de espacios normados

Algunos espacios normados de funciones

(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

9 de octubre de 2020

- 1 Introducción
- 2 El cociente de espacios vectoriales (repaso)
- 3 Seminorma en el espacio cociente
- 4 ¿Cuándo V/W es normado?
- 5 Completez

Objetivos

- Dado un espacio vectorial V y un subespacio vectorial W , repasar la definición del espacio cociente V/W .
- Si V es un espacio seminormado, definir una seminorma en V/W .
- Determinar, cuando V/W es normado.
- Demostrar que si V es completo, entonces V/W es completo.

Prerrequisitos

- El espacio cociente de espacios vectoriales.
- Seminorma y pseudométrica.
- La definición del ínfimo.
- Espacios de Banach.

Aplicaciones

- Definición de los espacios L^p que repasaremos en clases futuras:

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) / \mathcal{Z}(X, \mu).$$

- El concepto de conúcleo (cokérel) de un operador lineal:

$$\text{coker}(A) := \text{codom}(A) / \text{clos}(\text{im}(A)).$$

- Ideales y álgebras cocientes \mathcal{A}/J en álgebras de operadores.
Un subespacio J del álgebra \mathcal{A} se llama ideal si

$$J\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}J \subseteq \mathcal{A}.$$

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V .

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V :

$$a \overset{W}{\sim} b \iff a - b \in W.$$

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V .

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V :

$$a \overset{W}{\sim} b \iff a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V .

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V :

$$a \overset{W}{\sim} b \iff a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio. Sea $a \in V$. Pongamos $[a]_{\overset{W}{\sim}} := \{b \in V : b \overset{W}{\sim} a\}$.

Demostrar que $[a]_{\overset{W}{\sim}} = a + W$.

Definición del conjunto V/W

Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio vectorial de V .

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en V :

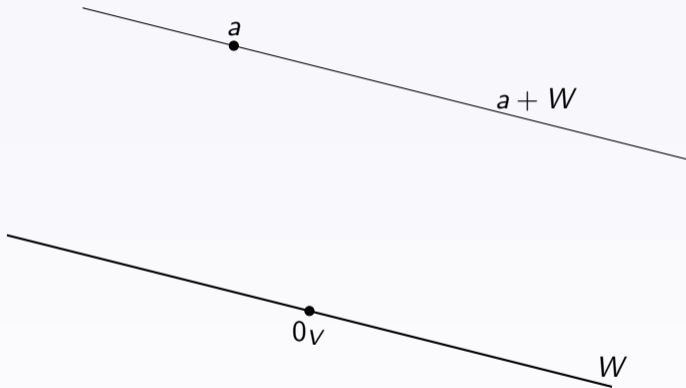
$$a \overset{W}{\sim} b \iff a - b \in W.$$

Ejercicio. Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio. Sea $a \in V$. Pongamos $[a]_{\overset{W}{\sim}} := \{b \in V : b \overset{W}{\sim} a\}$.

Demostrar que $[a]_{\overset{W}{\sim}} = a + W$.

Definición. $V/W := \{a + W : a \in V\}$.



Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $a \stackrel{W}{\sim} u$, $b \stackrel{W}{\sim} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que

$$(a + b) \stackrel{W}{\sim} (u + v), \quad \lambda a \stackrel{W}{\sim} \lambda u.$$

Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $a \stackrel{W}{\sim} u$, $b \stackrel{W}{\sim} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que

$$(a + b) \stackrel{W}{\sim} (u + v), \quad \lambda a \stackrel{W}{\sim} \lambda u.$$

Definición.

$$(a + W) \stackrel{V/W}{+} (b + W) := (a + b) + W,$$

$$\lambda \stackrel{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.$$

Operaciones lineales en el espacio cociente

Ejercicio. Sean $a, b, u, v \in V$, $a \stackrel{W}{\sim} u$, $b \stackrel{W}{\sim} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que

$$(a + b) \stackrel{W}{\sim} (u + v), \quad \lambda a \stackrel{W}{\sim} \lambda u.$$

Definición.

$$(a + W) \stackrel{V/W}{+} (b + W) := (a + b) + W,$$

$$\lambda \stackrel{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.$$

Ejercicio. Demostrar que V/W con estas operaciones es un espacio vectorial.

Otra descripción de la adición en V/W

Ejercicio. Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X +^{V/W} Y = X + Y.$$

Otra descripción de la adición en V/W

Ejercicio. Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X +^{V/W} Y = X + Y.$$

En otras palabras, si $a \in X$, $b \in Y$, demostrar que

$$\{v \in V: v - (a + b) \in W\} = \{v \in V: \exists x \in X \exists y \in Y \ v = x + y\}.$$

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Ejercicio. Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \cdot^{V/W} X = \lambda X.$$

En otras palabras, si $a \in X$, demostrar que

$$\{v \in V: v - \lambda a \in W\} = \{v \in V: \exists x \in X \ v = \lambda x\}.$$

Otra descripción de la multiplicación por escalares en V/W

Ejercicio. Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \cdot^{V/W} X = \lambda X.$$

En otras palabras, si $a \in X$, demostrar que

$$\{v \in V: v - \lambda a \in W\} = \{v \in V: \exists x \in X \ v = \lambda x\}.$$

Ejercicio. Mostrar que $0 \cdot^{V/W} W$ puede no coincidir con $0 W$.

Definición de seminorma (repass)

Sea V un espacio vectorial. Una función $N: V \rightarrow [0, +\infty)$ se llama **seminorma**, si

(N1) es subaditiva:

$$\forall u, v \in V \quad N(u + v) \leq N(u) + N(v),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall u \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad N(\lambda u) = |\lambda|N(u).$$

Proposición (sobre la seminorma en el espacio cociente)

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea W un subespacio vectorial de V .

Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P: V/W \rightarrow [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una seminorma.

Demostración de la propiedad subaditiva.

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X, v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v) \leq N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(X + Y) \leq P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, $P(X + Y) \leq P(X) + P(Y)$.



Demostración de la propiedad absolutamente homogénea.

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda \cdot X = W$ y $P(\lambda \cdot X) = 0 = \lambda P(X)$.

Consideremos el caso principal, cuando $\lambda \neq 0$. En este caso $\lambda \cdot X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos u en X tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda|N(u) \leq |\lambda|P(X) + \varepsilon.$$

Por otro lado, encontramos v en λX tal que $N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon$. Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|P(X) \leq |\lambda|N(v/\lambda) = N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Esto implica que $P(\lambda X) = |\lambda|P(X)$.



Ejemplo

Ejercicio. Consideramos $V = \mathbb{C}^2$ con la norma euclídeana $\|\cdot\|_2$.

Sean

$$a := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Consideramos el subespacio $W := \text{lin}(a)$ y el plano $X := b + W$.

Calcular $P(X)$.

Criterio para que el espacio cociente sea normado

Proposición

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea W un subespacio vectorial de V .

Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P: V/W \rightarrow [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una norma $\iff W$ es cerrado.

\implies . Supongamos que P es una norma. Demostremos que W es cerrado.

Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$, $b \in V$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $P(X) = 0$.

Como P es una norma, $X = 0_{V/W} = W$.

Por eso $b \in b + W = X = W$.

\Leftarrow . Supongamos que W es cerrado.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(v_k) = 0, \quad \text{esto es,} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como W es cerrado, X también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$, esto es, $X = W$.

Ejercicio sobre un conjunto cerrado desplazado

En la demostración anterior aplicamos una afirmación simple que se puede demostrar aparte y en una situación un poco más general.

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$. Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si A es abierto, entonces B es abierto.

Ejercicio. Sea (V, N) un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$. Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si A es cerrado, entonces B es cerrado.

Corolario: el espacio cociente de espacios normados

Corolario

Sea (V, N) un espacio normado, y sea W un subespacio vectorial de V .

Denotamos por V/W al espacio vectorial cociente. Definimos $P: V/W \rightarrow [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces P es una seminorma en V/W .

Más aún, P es una norma $\iff W$ es cerrado.

Corolario: la receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea

$$Z := N^{-1}[\{0\}], \quad \text{esto es,} \quad Z = \{u \in V : N(u) = 0\}.$$

Definimos $P: V/Z \rightarrow [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$.

Entonces $(V/Z, P)$ es un espacio normado.

Corolario: la receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado, y sea

$$Z := N^{-1}[\{0\}], \quad \text{esto es,} \quad Z = \{u \in V : N(u) = 0\}.$$

Definimos $P: V/Z \rightarrow [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$.

Entonces $(V/Z, P)$ es un espacio normado.

Ejercicio. Para demostrar el corolario, verificar que Z es un subespacio cerrado de V .

Completez del espacio cociente

Proposición

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea W un subespacio vectorial de V . Entonces V/W es completo.

Completez del espacio cociente

Demostración, inicio.

Sea $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W :

$$P(X_{k+1} - X_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{esto es,} \quad \inf_{v \in X_{k+1} - X_k} N(v) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Completez del espacio cociente

Demostración, inicio.

Sea $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W :

$$P(X_{k+1} - X_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{esto es,} \quad \inf_{v \in X_{k+1} - X_k} N(v) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Elegimos $u_1 \in X_1$.

Completez del espacio cociente

Demostración, inicio.

Sea $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W :

$$P(X_{k+1} - X_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{esto es,} \quad \inf_{v \in X_{k+1} - X_k} N(v) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Elegimos $u_1 \in X_1$.

Para cada k en \mathbb{N} , elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$.

Completez del espacio cociente

Demostración, inicio.

Sea $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W :

$$P(X_{k+1} - X_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{esto es,} \quad \inf_{v \in X_{k+1} - X_k} N(v) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Elegimos $u_1 \in X_1$.

Para cada k en \mathbb{N} , elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$.

Pongamos $u_{k+1} := u_k + v_{k+1}$.

Completez del espacio cociente

Demostración, inicio.

Sea $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en V/W :

$$P(X_{k+1} - X_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \text{esto es,} \quad \inf_{v \in X_{k+1} - X_k} N(v) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Elegimos $u_1 \in X_1$.

Para cada k en \mathbb{N} , elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$.

Pongamos $u_{k+1} := u_k + v_{k+1}$.

Entonces $\forall k \in \mathbb{N}$

$$u_k \in X_k, \quad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Completez del espacio cociente

Demostración, final.

$$u_k \in X_k, \quad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Completez del espacio cociente

Demostración, final.

$$u_k \in X_k, \quad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(u_k - z) = 0.$$

Completez del espacio cociente

Demostración, final.

$$u_k \in X_k, \quad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$.

Completez del espacio cociente

Demostración, final.

$$u_k \in X_k, \quad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^k}.$$

Como V es completo, encontramos z en V tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$. Entonces $P(X_k - Y) \leq N(u_k - z)$, y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(X_k - Y) = 0.$$



Completez del espacio cociente

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : N(v) = 0\}.$$

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Completez del espacio cociente

Corolario

Sea (V, N) un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : N(v) = 0\}.$$

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Corolario

Sea V un espacio de Banach, y sea W un subespacio cerrado de V .

Entonces V/W es un espacio de Banach.

Resumen

- Dado un espacio seminormado (V, N) y un subespacio vectorial W de V , el espacio vectorial cociente V/W se puede dotar de la seminorma

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u) \quad (X \in V/W).$$

- Si V es normado, V/W no necesariamente es normado.
- Para que V/W sea normado, es necesario y suficiente que W sea cerrado.
- Si V es de Banach y W es un subespacio cerrado de V , entonces V/W es de Banach.