# El cociente de espacios normados o seminormados

## (un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de octubre de 2022

# Objetivos

- Dado un espacio vectorial $V$ y un subespacio vectorial $W$, repasar la definición del espacio cociente $V/W$.
- Si $V$ es un espacio seminormado, definir una seminorma en $V/W$.
- Determinar, cuando $V/W$ es normado.
- Demostrar que si $V$ es completo, entonces $V/W$ es completo.

# Prerrequisitos

- El espacio cociente de espacios vectoriales.
- Seminorma y pseudométrica.
- La definición del ínfimo.
- Espacios de Banach.

# Ejemplos de aplicaciones

- Definición de los espacios $L^p$ que repasaremos en clases futuras:

$$L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

- El concepto de conúcleo (cokérnel) de un operador lineal:

$$\operatorname{coker}(A) := \operatorname{codom}(A)/\operatorname{cl}(\operatorname{im}(A)).$$

- Ideales y álgebras cocientes $\mathcal{A}/J$ en álgebras de operadores.
  Un subespacio $J$ del álgebra $\mathcal{A}$ se llama ideal, si

$$J\,\mathcal{A} \subseteq J, \qquad \mathcal{A}\,J \subseteq J.$$

# Congruencia módulo $W$

Sea $V$ un espacio vectorial complejo y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.

# Congruencia módulo $W$

Sea $V$ un espacio vectorial complejo y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en $V$:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

# Congruencia módulo $W$

Sea $V$ un espacio vectorial complejo y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.

Definimos una relación binaria $\overset{W}{\sim}$ en $V$:

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W.$$

**Ejercicio.** Demostrar que $\overset{W}{\sim}$ es una relación de equivalencia.

# Definición del conjunto $V/W$

# Definición del conjunto $V/W$

**Ejercicio.** Sea $a \in V$. Denotamos por $[a]_{\underset{\sim}{W}}$ la clase de equivalencia del elemento $a$:

$$[a]_{\underset{\sim}{W}} := \{b \in V : \quad b \overset{W}{\sim} a\}.$$

Demostrar que

$$[a]_{\underset{\sim}{W}} = a + W.$$

# Definición del conjunto $V/W$

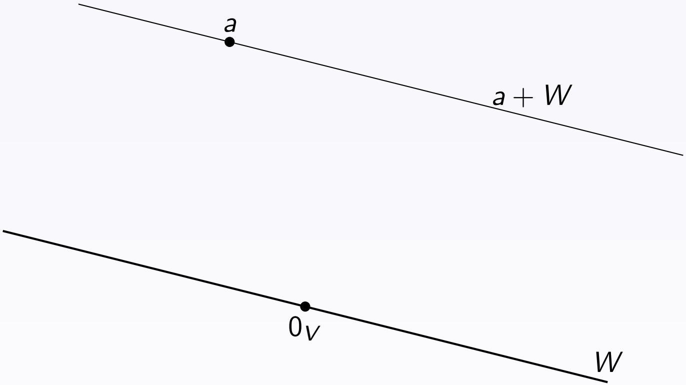
**Ejercicio.** Sea $a \in V$. Denotamos por $[a]_{\overset{W}{\sim}}$ la clase de equivalencia del elemento $a$:

$$[a]_{\overset{W}{\sim}} := \{b \in V : \quad b \overset{W}{\sim} a\}.$$

Demostrar que

$$[a]_{\overset{W}{\sim}} = a + W.$$

**Definición.** $V/W := \{a + W : \ a \in V\}.$


$a$
$a + W$
$0_V$
$W$

# Operaciones lineales en el espacio cociente

**Ejercicio.** Sean $a, b, u, v \in V$, $\quad a \overset{W}{\sim} u$, $\quad b \overset{W}{\sim} v$, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$.
Demostrar que

$$a + b \overset{W}{\sim} u + v, \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

# Operaciones lineales en el espacio cociente

**Ejercicio.** Sean $a, b, u, v \in V$, $\quad a \overset{W}{\sim} u$, $\quad b \overset{W}{\sim} v$, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$.
Demostrar que
$$a + b \overset{W}{\sim} u + v, \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

**Definición.**
$$\boxed{(a + W) \overset{V/W}{+} (b + W) := (a + b) + W,}$$
$$\boxed{\lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.}$$

# Operaciones lineales en el espacio cociente

**Ejercicio.** Sean $a, b, u, v \in V$, $a \overset{W}{\sim} u$, $b \overset{W}{\sim} v$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$a + b \overset{W}{\sim} u + v, \qquad \lambda a \overset{W}{\sim} \lambda u.$$

**Definición.**

$$(a + W) \overset{V/W}{+} (b + W) := (a + b) + W,$$

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W.$$

**Ejercicio.** Demostrar que $V/W$ con estas operaciones es un espacio vectorial.

# Otra descripción de la adición en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X \overset{V/W}{+} Y = X + Y.$$

# Otra descripción de la adición en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X, Y \in V/W$. Demostrar que

$$X \overset{V/W}{+} Y = X + Y.$$

En otras palabras, dados $a$ en $X$, $b$ en $Y$, demostrar que

$$\Big\{v \in V: \quad v - (a+b) \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V: \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y\Big\}.$$

# Otra descripción de la multiplicación por escalares en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

# Otra descripción de la multiplicación por escalares en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

En otras palabras, dado $a$ en $X$, demostrar que

$$\Big\{v \in V\colon \quad v - \lambda a \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad v = \lambda x\Big\}.$$

# Otra descripción de la multiplicación por escalares en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

En otras palabras, dado $a$ en $X$, demostrar que

$$\Big\{v \in V: \quad v - \lambda a \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V: \quad \exists x \in X \quad v = \lambda x\Big\}.$$

**Ejercicio.** Mostrar que $0 \overset{V/W}{\cdot} W \;=\; W, \quad 0\,W = \{0_V\}.$

# Otra descripción de la multiplicación por escalares en $V/W$

**Ejercicio.** Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X.$$

En otras palabras, dado $a$ en $X$, demostrar que

$$\Big\{v \in V\colon \quad v - \lambda a \in W\Big\} \quad = \quad \Big\{v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad v = \lambda x\Big\}.$$

**Ejercicio.** Mostrar que $0 \overset{V/W}{\cdot} W = W, \quad 0\,W = \{0_V\}$.

Conclusión: si $W \neq \{0_V\}$, entonces $0 \overset{V/W}{\cdot} W \neq 0\,W$.

# Definición de seminorma (repaso)

Sea $V$ un espacio vectorial complejo.

Una función $N\colon V \to [0, +\infty)$ se llama seminorma, si

(N1) es subaditiva:

$$\forall u, v \in V \qquad N(u+v) \le N(u) + N(v),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall u \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u).$$

## Proposición (sobre la seminorma en el espacio cociente)

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado, y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.
Denotamos por $V/W$ al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces $P$ es una seminorma.

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$\boxed{P(X) := \inf_{u \in X} N(u).}$$

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v)$

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq$

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.

2. Para cada $\varepsilon > 0$,

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.

2. Para cada $\varepsilon > 0$, $\quad$ existe $v$ en $X$ tal que

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, $\quad$ existe $v$ en $X$ tal que $\quad N(v)$

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, $\quad$ existe $v$ en $X$ tal que $\quad N(v) <$

# ¿Cómo trabajar con la definición de $P(X)$?

Dado $X$ en $V/W$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Queremos demostrar que $P$ es una seminorma.

Antes de hacerlo, hay que entender dos principios que salen de la definición del ínfimo.

1. Para cada $v$ en $X$, $\quad N(v) \geq P(X)$.
2. Para cada $\varepsilon > 0$, $\quad$ existe $v$ en $X$ tal que $\quad N(v) < P(X) + \varepsilon$.

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$.

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$.

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

## Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y)$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v)$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v) \leq$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \leq N(u + v) \leq N(u) + N(v)$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \le N(u + v) \le N(u) + N(v) <$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X+Y) \le N(u+v) \le N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X + Y) \le N(u + v) \le N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(X + Y) \le P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

# Demostración de la propiedad subaditiva

Sean $X, Y \in V/W$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $u \in X$, $v \in Y$ tales que

$$N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad N(v) < P(Y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $u + v \in X + Y$ y

$$P(X+Y) \le N(u+v) \le N(u) + N(v) < P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(X+Y) \le P(X) + P(Y) + \varepsilon.$$

Por lo tanto, $P(X+Y) \le P(X) + P(Y)$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X =$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) =$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces

$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso

$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0 =$$

## Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda = 0$

Sean $X \in V/W$, $\lambda = 0$.

Entonces
$$\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = W,$$

por eso
$$P(\lambda \overset{V/W}{\cdot} X) = 0 = \lambda\, P(X).$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \le |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X =$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \le |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda\, X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda| \, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) =$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda\, X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda\, X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(x)$

Sean $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda\, X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $u$ en $X$ tal que $N(u) < P(X) + \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Entonces $\lambda u \in \lambda X$ y

$$P(\lambda X) \leq N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \leq |\lambda| P(X) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$P(\lambda X) \leq |\lambda|\, P(X).$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X =$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda) =$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda) = N(v)$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda) = N(v) <$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda) = N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

# Demostración de la propiedad absolutamente homogénea, el caso $\lambda \neq 0$, desigualdad $P(\lambda X) \geq |\lambda|\, P(x)$

Seguimos suponiendo que $X \in V/W$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso $\lambda \overset{V/W}{\cdot} X = \lambda X$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $v$ en $\lambda X$ tal que

$$N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Entonces $v/\lambda \in X$ y

$$|\lambda|\, P(X) \leq |\lambda|\, N(v/\lambda) = N(v) < P(\lambda X) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $|\lambda|\, P(x) \leq P(\lambda X)$.

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0, +\infty)$.

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0, +\infty)$.

$$P(X) :=$$

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0, +\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

**Proposición**

Para cada $v$ en $V$,

$$P(v+W) \le N(v).$$

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0,+\infty)$.

$$P(X) \coloneqq \inf_{u\in X} N(u).$$

**Proposición**

Para cada $v$ en $V$,

$$P(v+W) \le N(v).$$

**Demostración.**

# Una propiedad importante de $P$

Recordamos la definición de la seminorma $P\colon V/W \to [0, +\infty)$.

$$P(X) \coloneqq \inf_{u \in X} N(u).$$

## Proposición

Para cada $v$ en $V$,

$$P(v + W) \le N(v).$$

**Demostración.** $v \in v + W$, por eso $\inf_{u \in v+W} N(u) \le N(v)$.

# Ejemplo

**Ejercicio.** Consideramos $V = \mathbb{C}^2$ con la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$.
Sean

$$a := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Consideramos el subespacio $W := \mathrm{lin}(a)$ y el plano $X := b + W$.

Calcular $P(X)$.

# Ejemplo

Recordatorio.

# Ejemplo

Recordatorio.

$$c(\mathbb{N}) :=$$

# Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes, con la norma-supremo;

# Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes, con la norma-supremo;

$c_0(\mathbb{N}) :=$

# Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes, con la norma-supremo;

$c_0(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes al 0, con la norma-supremo.

# Ejemplo

Recordatorio.

$c(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes, con la norma-supremo;

$c_0(\mathbb{N}) :=$ el espacio de las sucesiones convergentes al 0, con la norma-supremo.

**Ejercicio.** Construir un isomorfismo isométrico $T\colon \mathbb{C} \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$.

# Criterio para que el espacio cociente sea normado

**Proposición**

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado, y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$. Denotamos por $V/W$ al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces $P$ es una norma $\iff$ $W$ es cerrado.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \mathrm{cl}(W)$.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \mathrm{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \mathrm{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada $k$.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \mathrm{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada $k$. Luego $P(X) = 0$.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \operatorname{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada $k$. Luego $P(X) = 0$.

Como $P$ es una norma, $X = 0_{V/W} = W$.

# Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que $P$ es una norma. Demostremos que $W$ es cerrado.

Sea $b \in \mathrm{cl}(W)$. Encontramos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(b - a_k) = 0.$$

Pongamos $X := b + W$. Entonces $b - a_k \in X$ para cada $k$. Luego $P(X) = 0$.

Como $P$ es una norma, $X = 0_{V/W} = W$.

Por eso $b \in b + W = X = W$.

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0,$$

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,}$$

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como $W$ es cerrado, $X$ también es cerrado (ejercicio).

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k \to \infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como $W$ es cerrado, $X$ también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$,

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k\to\infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como $W$ es cerrado, $X$ también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$, esto es,

# Demostración, $\Longleftarrow$

Supongamos que $W$ es cerrado. Demostremos que $P$ es una norma.

Sea $X \in V/W$ tal que $P(X) = 0$, esto es,

$$\inf_{u \in X} N(u) = 0.$$

Usando la definición del ínfimo encontramos una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} N(v_k) = 0, \qquad \text{esto es,} \qquad \lim_{k \to \infty} N(v_k - 0_V) = 0.$$

Como $W$ es cerrado, $X$ también es cerrado (ejercicio).

Luego $0_V \in X$, esto es, $X = W$.

# Ejercicio sobre un conjunto cerrado desplazado

En la demostración anterior aplicamos una afirmación simple
que se puede demostrar aparte y en una situación un poco más general.

**Ejercicio.** Sea $(V, N)$ un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$.
Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si $A$ es abierto, entonces $B$ es abierto.

**Ejercicio.** Sea $(V, N)$ un espacio vectorial seminormado y sean $A \subseteq V$, $u \in V$.
Pongamos $B = u + A$. Demostrar que si $A$ es cerrado, entonces $B$ es cerrado.

# Corolario: el espacio cociente de espacios normados

## Corolario

Sea $(V, N)$ un espacio normado, y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.

Denotamos por $V/W$ al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces $P$ es una seminorma en $V/W$.

Más aún, $P$ es una norma $\iff$ $W$ es cerrado.

# Corolario: el espacio cociente de espacios normados

**Corolario**

Sea $(V, N)$ un espacio normado, y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$.

Denotamos por $V/W$ al espacio vectorial cociente. Definimos $P\colon V/W \to [0, +\infty)$,

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u).$$

Entonces $P$ es una seminorma en $V/W$.

Más aún, $P$ es una norma $\iff$ $W$ es cerrado.

**Observación:** tenemos la misma situación que cuando $N$ es una seminorma.

No nos ayuda mucho la suposición que $N$ es una norma.

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N}) =$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N}) =$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

$W := c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) =$ el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N}) =$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

$W := c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) =$ el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

Sabemos que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach (más, es un espacio de Hilbert).

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N}) =$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

$W := c_{\text{fin}}(\mathbb{N}) =$ el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

Sabemos que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach (más, es un espacio de Hilbert).

1. Demostrar que $W \neq V$.

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N}) =$ el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

$W := c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) =$ el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

Sabemos que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach (más, es un espacio de Hilbert).

1. Demostrar que $W \neq V$.
2. Demostrar que $\mathrm{cl}(W) = V$.

# Ejemplo, cuando $V/W$ no es normado

**Ejercicio.** Sean

$V := \ell^2(\mathbb{N})$ = el espacio de las sucesiones cuadrado sumables, con la norma $\|\cdot\|_2$;

$W := c_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ = el espacio vectorial de las sucesiones de soporte finito.

Sabemos que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach (más, es un espacio de Hilbert).

1. Demostrar que $W \neq V$.

2. Demostrar que $\text{cl}(W) = V$.

3. Sea $a \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus W$.

Demostrar de manera directa que $P(a + W) = 0$ y $a + W \neq W$.

# La receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

## Corolario

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado, y sea $Z = \{u \in V\colon \quad N(u) = 0\}$.

Definimos $P\colon V/Z \to [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$. Entonces:

1. $Z$ es un subespacio vectorial cerrado de $V$,
2. $(V/Z, P)$ es un espacio normado;
3. $P(X) = N(v)$ para cada $v$ en $X$.

# La receta canónica para construir un espacio normado a partir de un espacio seminormado

## Corolario

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado, y sea $Z = \{u \in V\colon \quad N(u) = 0\}$.
Definimos $P\colon V/Z \to [0, +\infty)$ como antes: $P(X) := \inf_{u \in X} N(u)$. Entonces:

1. $Z$ es un subespacio vectorial cerrado de $V$,
2. $(V/Z, P)$ es un espacio normado;
3. $P(X) = N(v)$ para cada $v$ en $X$.

**Ejercicio.** Demostrar el corolario. Sugerencia: $Z := N^{-1}[\{0\}]$.

# Completez del espacio cociente

**Proposición**

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado completo y sea $W$ un subespacio vectorial de $V$. Entonces $V/W$ es completo.

## Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $V/W$:

$$P(X_{k+1}-X_k)<\frac{1}{2^{k+1}},\qquad \text{esto es,}\qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

# Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $V/W$:

$$P(X_{k+1}-X_k)<\frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada $k$ en $\mathbb{N}$, elegimos $\quad v_{k+1}\in X_{k+1}-X_k \quad$ tal que $\quad N(v_{k+1})<\dfrac{1}{2^{k+1}}.$

# Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $V/W$:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada $k$ en $\mathbb{N}$, elegimos $\quad v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k \quad$ tal que $\quad N(v_{k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1 \in X_1$.

# Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $V/W$:

$$P(X_{k+1} - X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada $k$ en $\mathbb{N}$, elegimos $v_{k+1} \in X_{k+1} - X_k$ tal que $N(v_{k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1 \in X_1$. Luego pongamos $u_{k+1} := u_k + v_{k+1}$ para cada $k$.

# Completez del espacio cociente, inicio de la demostración

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $V/W$:

$$P(X_{k+1}-X_k) < \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \text{esto es,} \qquad \inf_{v\in X_{k+1}-X_k} N(v) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Para cada $k$ en $\mathbb{N}$, elegimos $\quad v_{k+1}\in X_{k+1}-X_k \quad$ tal que $\quad N(v_{k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Elegimos $u_1\in X_1$. Luego pongamos $u_{k+1} := u_k + v_{k+1}$ para cada $k$.

Entonces $\quad \forall k\in\mathbb{N}$

$$u_k\in X_k, \qquad N(u_{k+1}-u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

# Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

# Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

# Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como $V$ es completo, encontramos $z$ en $V$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

# Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como $V$ es completo, encontramos $z$ en $V$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$.

## Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como $V$ es completo, encontramos $z$ en $V$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$. Entonces $P(X_k - Y) \le N(u_k - z)$,

# Completez del espacio cociente, final de la demostración

$$u_k \in X_k, \qquad N(u_{k+1} - u_k) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

La sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.

Como $V$ es completo, encontramos $z$ en $V$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N(u_k - z) = 0.$$

Pongamos $Y := z + W$. Entonces $P(X_k - Y) \le N(u_k - z)$, y

$$\lim_{k\to\infty} P(X_k - Y) = 0.$$

$\square$

# Completez del espacio cociente: demostración que utiliza series

**Ejercicio.** Suponemos las condiciones de la proposición anterior.

Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $V/W$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_k) < +\infty.$$

Demostrar que existe $Y$ en $V/W$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} P\left(Y - \sum_{k=1}^{m} X_k\right) = 0.$$

Usando un criterio de completez de espacios normados (o seminormados), concluir que $V/W$ es completo.

# Completez del espacio cociente

## Corolario

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : \quad N(v) = 0\}.$$

Entonces $V/W$ es un espacio de Banach.

## Completez del espacio cociente

### Corolario

Sea $(V, N)$ un espacio seminormado completo, y sea

$$W := \{v \in V : \quad N(v) = 0\}.$$

Entonces $V/W$ es un espacio de Banach.

### Corolario

Sea $V$ un espacio de Banach, y sea $W$ un subespacio cerrado de $V$.

Entonces $V/W$ es un espacio de Banach.

# Resumen

- Dado un espacio seminormado $(V, N)$ y un subespacio vectorial $W$ de $V$, el espacio vectorial cociente $V/W$ se puede dotar de la seminorma

$$P(X) := \inf_{u \in X} N(u) \qquad (X \in V/W).$$

- Si $V$ es normado, $V/W$ no necesariamente es normado.
- Para que $V/W$ sea normado, es necesario y suficiente que $W$ sea cerrado.
- Si $V$ es de Banach y $W$ es un subespacio cerrado de $V$, entonces $V/W$ es de Banach.