# Espacios normados

# (un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

9 de noviembre de 2022

**Objetivos.**

- Conocer la definición de espacios normados.
- Definir la distancia inducida por una norma.

**Objetivos.**

- Conocer la definición de espacios normados.
- Definir la distancia inducida por una norma.

**Prerrequisitos.**

- Espacios métricos.
- Experiencia de trabajar con varias normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

# Definición de la norma

Sea $V$ un espacio vectorial complejo.

Una función $N\colon V \to [0, +\infty)$ se llama norma en $V$ si

(N1) es subaditiva:

$$\forall a, b \in V \qquad N(a+b) \le N(a) + N(b),$$

(N2) es absolutamente homogénea:

$$\forall a \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad N(\lambda a) = |\lambda| N(a),$$

(N3) es estrictamente positiva:

$$\forall a \in V \setminus \{0_V\} \qquad N(a) > 0.$$

# Otras formas de la condición (N3)

La condición (N3) requiere que $N$ sea estrictamente positiva en los vectores no nulos:

$$\text{(N3)}\ \ \forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) > 0.$$

# Otras formas de la condición (N3)

La condición (N3) requiere que $N$ sea estrictamente positiva en los vectores no nulos:

$$\text{(N3)}\ \ \forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) > 0.$$

Como $N(a) \geq 0$ para cada $a$ en $V$, tenemos otras formas equivalentes de la condición (N3):

# Otras formas de la condición (N3)

La condición (N3) requiere que $N$ sea estrictamente positiva en los vectores no nulos:

(N3) $\forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) > 0.$

Como $N(a) \geq 0$ para cada $a$ en $V$, tenemos otras formas equivalentes de la condición (N3):

(N3') $\forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) \neq 0;$

# Otras formas de la condición (N3)

La condición (N3) requiere que $N$ sea estrictamente positiva en los vectores no nulos:

$$\text{(N3)}\ \ \forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) > 0.$$

Como $N(a) \geq 0$ para cada $a$ en $V$, tenemos otras formas equivalentes de la condición (N3):

$$\text{(N3')}\ \ \forall a \in V \setminus \{0_V\} \quad N(a) \neq 0;$$

$$\text{(N3'')}\ \ \forall a \in V \qquad N(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0_V.$$

# Definición del espacio normado

Un par $(V, N)$ se llama espacio normado complejo,
si $V$ es un espacio vectorial complejo y $N$ es una norma en $V$.

# Definición del espacio normado

Un par $(V, N)$ se llama espacio normado complejo,
si $V$ es un espacio vectorial complejo y $N$ es una norma en $V$.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

# Definición del espacio normado

Un par $(V, N)$ se llama espacio normado complejo,
si $V$ es un espacio vectorial complejo y $N$ es una norma en $V$.

Por lo común, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

Estructuras matemáticas que contiene un espacio normado:

- espacio vectorial, grupo abeliano,
- espacio métrico (lo repasaremos), espacio topológico,
- grupo abeliano topológico (lo veremos), espacio vectorial topológico (lo veremos).

# Corolarios triviales de la definición de la norma

### Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

# Corolarios triviales de la definición de la norma

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

**Demostración:**

# Corolarios triviales de la definición de la norma

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

**Demostración:** aplicar la propiedad absolutamente homogénea con $\lambda = 0$, $a = 0_V$.

# Corolarios triviales de la definición de la norma

**Proposición**

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

**Demostración:** aplicar la propiedad absolutamente homogénea con $\lambda = 0$, $a = 0_V$.

**Proposición**

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo y sea $a \in V$. Entonces $N(-a) = N(a)$.

# Corolarios triviales de la definición de la norma

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

**Demostración:** aplicar la propiedad absolutamente homogénea con $\lambda = 0$, $a = 0_V$.

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo y sea $a \in V$. Entonces $N(-a) = N(a)$.

**Demostración:**

# Corolarios triviales de la definición de la norma

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$N(0_V) = 0.$$

**Demostración:** aplicar la propiedad absolutamente homogénea con $\lambda = 0$, $a = 0_V$.

## Proposición

Sea $(V, N)$ un espacio normado complejo y sea $a \in V$. Entonces $N(-a) = N(a)$.

**Demostración:** aplicar la propiedad absolutamente homogénea con $\lambda = -1$.

# La métrica inducida por una norma

**Proposición**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces $d$ es una métrica, esto es,

(D1) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ para cada $a, b, c \in V$,

(D2) $d(a, b) = d(b, a)$ para cada $a, b \in V$,

(D3) $d(a, a) = 0$ para cada $a$ en $V$,

(D4) si $a, b \in V$ y $d(a, b) = 0$, entonces $a = b$.

# La métrica inducida por una norma

**Ejercicio.** Demostrar que $d(a, b) := \|a - b\|$ es una métrica.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(N1)} & \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \\ \text{(N2)} & \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|, \\ \text{(N3)} & \|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0_V. \\ & \\ & d(a, b) := \|a - b\|. \end{array}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(D1)} & d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b), \\ \text{(D2)} & d(a, b) = d(b, a), \\ \text{(D3)} & d(a, a) = 0, \\ \text{(D4)} & d(a, b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b. \end{array}}$$

# La norma se puede expresar en términos de la métrica inducida

Notemos que si $d$ es la métrica inducida por la norma $|\cdot\|$, entonces

$$\|a\| =$$

# La norma se puede expresar en términos de la métrica inducida

Notemos que si $d$ es la métrica inducida por la norma $|\cdot\|$, entonces

$$\|a\| \;=\; d(a, 0_V).$$

# Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

## Proposición

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces $d$ es invariante bajo las traslaciones simultáneas de dos argumentos y homogénea absoluta bajo las dilataciones simultáneas de dos argumentos:

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in V && d(a + c, b + c) = d(a, b), \\ &\forall a, b \in V \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} && d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b). \end{aligned}$$

# Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

**Proposición**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces $d$ es invariante bajo las traslaciones simultáneas de dos argumentos y homogénea absoluta bajo las dilataciones simultáneas de dos argumentos:

$$\begin{aligned} &\forall a, b, c \in V && && d(a + c, b + c) = d(a, b), \\ &\forall a, b \in V && \forall \lambda \in \mathbb{C} && d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b). \end{aligned}$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición.

# Propiedades especiales de la métrica inducida por una norma

**Ejercicio.** Sea $V$ un espacio vectorial complejo y sea $d$ una métrica en $V$ tal que

$$\forall a, b, c \in V \qquad d(a + c, b + c) = d(a, b),$$

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b).$$

Demostrar que existe una única norma $\|\cdot\|$ que induce $d$.

# La norma es una función Lipschitz continua con coeficiente 1

**Proposición**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces para cada $a, b$ en $V$

$$\Big|\,\|a\| - \|b\|\,\Big| \;\leq\; \|a - b\|.$$

# La norma es una función Lipschitz continua con coeficiente 1

**Proposición**

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces para cada $a, b$ en $V$

$$\Big|\, \|a\| - \|b\| \,\Big| \;\leq\; \|a - b\|.$$

**Ejercicio:** demostrar la proposición.

# La norma es una función Lipschitz continua con coeficiente 1

**Idea de la primera demostración.**

- $\|a\| = \|(a-b)+b\| \le \|a-b\| + \|b\|$,
- $\|a\| - \|b\| \le \|a-b\|$,
- de manera similar $\|b\| - \|a\| \le \|a-b\|$,
- $|t| \le u \quad \Longleftrightarrow \quad -u \le t \le u$.

**Idea de la segunda demostración.**

usar la desigualdad inversa del triángulo para la métrica $d$ inducida por $\|\cdot\|$:

$$\Big|d(a,c) - d(b,c)\Big| \;\le\; d(a,b).$$