Espacios normados y espacios de Banach

Objetivos. Estudiar la definición de la norma y sus propiedades básicas.

Prerrequisitos. Espacios vectoriales reales o complejos, el valor absoluto de números reales y complejos, espacios métricos, espacios métricos completos.

1 Definición (norma, espacio normado)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0,+\infty)$ una función. Se dice que N es una *norma* en V, si se cumplen las siguientes propiedades (los axiomas de norma).

N1. La propiedad subaditiva: para cualesquiera a, b en V,

$$N(a+b) \le N(a) + N(b).$$

N2. La propiedad homogénea absoluta: para cualesquiera a en V y λ en $\mathbb{C}$,

$$N(\lambda a) = |\lambda| N(a).$$

N3. Para cada a en $V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $N(a) > 0$.

En esta situación el par ordenado (V, N) se llama *espacio complejo normado.*

2 Proposición (la norma del vector cero es cero)**.** *Sea* (V, N) *un espacio normado complejo. Entonces*

$$N(0_V) = 0.$$

Demostración. Sabemos que en cualquier espacio vectorial $0\,0_V = 0_V$. Aplicamos N2 y la propiedad principal del número 0:

$$N(0_V) = N(0\,0_V) = 0\,N(0_V) = 0. \qquad \square$$

3 Observación (otra forma lógica de la condición N3)**.** Tomando en cuenta que la función N toma valores en $[0,+\infty)$, la condición N3 es equivalente a la siguiente:

$$\forall a \in V \quad N(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0_V.$$

4 Observación. Gracias a las observaciones anteriores, la condición N3 se puede sustituir por la siguiente:

$$\forall a \in V \quad N(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0_V.$$

5 Proposición (la norma del vector opuesto)**.** *Sea* (V, N) *un espacio normado complejo y sea* $a \in V$*. Entonces*

$$N(-a) = N(a).$$

Demostración. Sabemos que en cualquier espacio vectorial, $-a = (-1)a$. Aplicamos N2, la igualdad $|-1| = 1$ y la propiedad principal del número 1:

$$N(-a) = N((-1)a) = |-1|\, N(a) = 1\, N(a) = N(a). \qquad \square$$

6 Ejercicio. Sea (V, N) un espacio normado complejo. Definimos $d\colon V^2 \to [0, +\infty)$,

$$d(a, b) := N(a - b).$$

Demostrar que d es una distancia. Se dice que d es la *distancia inducida por* N.

7 Definición. Sea (V, N) un espacio normado complejo. Denotemos por d la distancia inducida por N. Se dice que el espacio normado (V, N) es *completo* o es un *espacio de Banach*, si el espacio métrico (V, d) es completo.

En un futuro estudiaremos de manera más detallada la distancia inducida por una norma. Además, estudiaremos un criterio de completez de espacios normados en términos de la convergencia de series.

8 Proposición (la normalización de un vector)**.** *Sea* (V, N) *un espacio normado complejo y sea* $a \in V \setminus \{0_V\}$*. Pongamos*

$$u := \frac{1}{N(a)}\, a.$$

Entonces $N(u) = 1$*.*

Demostración. Primero notemos que $N(a) > 0$ por N3, así que la definición de u es consistente. Para calcular $N(u)$, aplicamos N2 y el hecho que $N(a) > 0$:

$$N(u) = N\left(\frac{1}{N(a)}\, a\right) = \left|\frac{1}{N(a)}\right| N(a) = \frac{1}{|N(a)|}\, N(a) = \frac{1}{N(a)}\, N(a) = 1. \qquad \square$$

9 Proposición (la propiedad subaditiva para una suma finita de vectores en un espacio normado)**.** *Sea* (V, N) *un espacio normado complejo. Entonces para cada* m *en* $\mathbb{N}$ *y cada* $a_1, \ldots, a_m$ *en* V*,*

$$N\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} N(a_k).$$

Demostración. Inducción matemática sobre m, usando la propiedad subaditiva N1. □

10 Proposición (cota superior para la norma de una combinación lineal de vectores en un espacio normado)**.** *Sean* (V, N) *un espacio normado complejo,* $m \in \mathbb{N}$*,* $a_1, \ldots, a_m \in V$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$*. Entonces*

$$N\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k| \, N(a_k).$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 9 y de la propiedad absolutamente homogénea N2. □