Espacios normados y espacios de Banach

1 Definición (norma, espacio normado)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty)$ una función. Se dice que N es una *norma* en V, si se cumplen las siguientes propiedades (axiomas de norma).

N1. La propiedad subaditiva: para cualesquiera a, b en V,

$$N(a + b) \le N(a) + N(b).$$

N2. La propiedad homogénea absoluta: para cualesquiera a en V y λ en $\mathbb{C}$,

$$N(\lambda a) = |\lambda| N(a).$$

N3. Para cada a en $V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $N(a) > 0$.

En esta situación el par ordenado (V, N) se llama *espacio complejo normado.*

2 Observación (la norma del vector cero es cero)**.** La condición N2 y propiedades de la multiplicación por escalares en un espacio vectorial implican que

$$N(0_V) = N(0\, 0_V) = 0\, N(0_V) = 0.$$

3 Observación (otra forma lógica de la condición N3)**.** Tomando en cuenta que la función N toma valores en $[0, +\infty)$, la condición N3 es equivalente a la siguiente:

$$\forall a \in V \quad N(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0_V.$$

4 Observación. Gracias a las observaciones anteriores, la condición N3 se puede sustituir por la siguiente:

$$\forall a \in V \quad N(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0_V.$$

5 Observación. Por lo común, para la norma se usa la notación $\|\cdot\|$ o algunas notaciones similares. En este caso, en vez de $N(a)$ se escribe $\|a\|$.

6 Proposición (la métrica inducida por una norma)**.** *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Definimos* $d\colon V^2 \to [0, +\infty)$ *mediante la regla*

$$d(a, b) := \|a - b\|.$$

Entonces d es una métrica.

Demostración. Demostremos la desigualdad del triángulo usando N1:

$$d(a,b) = \|a-b\| = \|(a-c)+(c-b)\| \le \|a-c\| + \|c-b\| = d(a,c) + d(c,b).$$

Demostremos la propiedad simétrica de d usando N2:

$$d(b,a) = \|b-a\| = \|(-1)(a-b)\| = |-1|\,\|a-b\| = d(a,b).$$

Usando N3 demostremos que la métrica separa los puntos. Si $a,b \in V$ y $a \neq b$, entonces $a-b \neq 0_V$ y

$$d(a,b) = N(a-b) > 0.$$

□

7 Observación (la norma se puede recuperar en términos de la métrica inducida)**.** Notemos que si d es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$, entonces para cada a en V se tiene que

$$\|a\| = \|a - 0_V\| = d(a, 0_V).$$

8 Observación. Cualquier espacio normado se puede considerar como un espacio métrico (respecto a la métrica inducida por la norma), así que en el espacio normado se definen todos los conceptos definidos para espacios métricos: bolas abiertas y cerradas, sucesiones de Cauchy, completitud, funciones uniformemente continuas, etc. La métrica inducida por la norma, a su vez, induce una topología, así que para un espacio normado se definen todos los conceptos de espacios topológicos.

9 Proposición (subespacio de un espacio normado)**.** *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces el espacio vectorial W, considerado con la norma $\|\cdot\|$ restringida a W, es un espacio normado.*

10 Definición (espacio de Banach)**.** Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

A continuación del curso vamos a estudiar varios ejemplos importantes de espacios normados. Todos los ejemplos de la siguiente lista son espacios de Banach.

1. El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de sucesiones (complejas) acotadas.

2. El espacio $c(\mathbb{N})$ de sucesiones convergentes. Es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

3. El espacio $c_0(\mathbb{N})$ de sucesiones convergentes a cero. Es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

4. El espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ de sucesiones p-sumables, donde $1 \leq p < +\infty$.

5. El espacio $B(X)$ de funciones acotadas (complejas) definidas en un conjunto X.

6. El espacio $C_b(X)$ de funciones acotadas continuas en un espacio métrico (o topológico) X. Es un subespacio cerrado de $B(X)$.

7. El espacio $C(K)$ de funciones continuas en un espacio métrico compacto K (o en espacio topológico compacto K). Como cada funciones continua definida en un compacto es acotada, este espacio coincide con $C_b(K)$.

8. El espacio $C_{b,u}(X)$ de funciones acotadas uniformemente continuas en un espacio métrico X. Notemos que si K es un espacio métrico compacto, entonces cualquier función continua $X \to \mathbb{C}$ es acotada y uniformemente continua, así que en este caso $C_{b,u}(K) = C_b(K) = C(K)$.

9. El espacio $C_0(\mathbb{R})$ de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que tienden a cero en el infinito. En vez del dominio $\mathbb{R}$ se podría tomar cualquier espacio de Hausdorff localmente compacto.

Después de estudiar la teoría de la medida y la teoría de la integral de Lebesgue (en el curso Análisis Matemático II), podremos introducir los siguientes espacios de Banach muy importantes.

1. El espacio $L^\infty(X, \mu)$ de clases de equivalencia de funciones esencialmente acotadas, definidas en un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

2. El espacio $L^p(X, \mu)$ de clases de equivalencia de funciones p-integrables, donde $1 \leq p < +\infty$.

También mencionemos algunos espacios normados que no son de Banach.

1. El espacio $\mathcal{F}$ de sucesiones finitas, con la norma-supremo. Es denso en $c_0(\mathbb{N})$.

2. El espacio de polinomios considerados como funciones en un intervalo $[\alpha, \beta]$, con la norma-supremo. Este espacio es denso en $C([\alpha, \beta])$.

3. El espacio $C_c(\mathbb{R})$ de funciones continuas de soporte compacto, con la norma-supremo. Este espacio es denso en $C_0(\mathbb{R})$.