Los operadores normales
y sus propiedades elementales

Este borrador no es completo.

Objetivos. Definir el concepto de operador normal en un espacio de Hilbert; estudiar sus criterios y propiedades elementales.

Prerrequisitos. El operador adjunto de un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo. La teoría para el caso real es diferente. Dado un operador S de clase $\mathcal{B}(H)$, denotamos por S^* su adjunto.

1 Definición. Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que S es *normal*, si $SS^* = S^*S$.

2 Proposición. *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces S es normal si, y sólo si, S^* es normal.*

Demostración. En efecto, como $(S^*)^* = S$, los operadores S y S^* hacen papeles simétricos en la definición de operador normal. □

3 Proposición (criterio de operador normal en términos de las normas)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) S es normal;

(b) $\|Su\| = \|S^*u\|$ para cada u en H.

Demostración. Supongamos (b) y demostremos (a). Para cada u en H, tenemos que

$$\langle S^*Su, u\rangle = \langle Su, Su\rangle = \|Su\|^2 = \|S^*u\|^2 = \langle S^*u, S^*u\rangle = \langle SS^*u, u\rangle.$$

Hemos mostrado que S^*S y SS^* inducen la misma forma cuadrática. Debido a la identidad de polarización para las formas sesquilineales, S^*S y SS^* inducen la misma forma sesquilineal. Por lo tanto $S^*S = SS^*$. □

4 Ejemplo (algunas subclases de operadores normales)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que

- S es *autoadjunto* o *hermitiano*, si $S^* = S$;
- S es una *proyección ortogonal*, si $S^* = S$ y $S^2 = S$;
- S es *no negativo*, si existe R en $\mathcal{B}(H)$ tal que $R^* R = S$;
- S es *unitario*, si $S^* S = I$ y $S S^* = I$.

5 Definición (la parte real y la parte imaginaria de un operador lineal acotado)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $\operatorname{Re}(S)\colon H \to H$, $\operatorname{Im}(S)\colon H \to H$,

$$\operatorname{Re}(S) \coloneqq \frac{1}{2}\big(S + S^*\big), \qquad \operatorname{Im}(S) \coloneqq \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(S - S^*\big).$$

6 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$*. Entonces*

$$S = \operatorname{Re}(S) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(S),$$

y los operadores $\operatorname{Re}(S)$, $\operatorname{Im}(S)$ *son autoadjuntos.*

Demostración. Los operadores $\operatorname{Re}(S)$ e $\operatorname{Im}(S)$ se definen como ciertas combinaciones lineales de los operadores S y S^*, por lo tanto son lineales y acotados. Mostremos que $\operatorname{Re}(S)$ e $\operatorname{Im}(S)$ son autoadjuntos.

$$\operatorname{Re}(S)^* = \frac{1}{2}\big(S + S^*\big)^* = \frac{1}{2}\big(S^* + S\big) = \operatorname{Re}(S),$$

$$\operatorname{Im}(S)^* = \frac{1}{\overline{2\,\mathrm{i}}}\big(S - S^*\big)^* = -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(S^* - S\big) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(S - S^*\big) = \operatorname{Im}(S). \qquad \square$$

7 Ejercicio (unicidad de la descomposición del operador en su parte real e imaginaria)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(H)$ y sean $T, U \in \mathcal{B}(H)$ tales que

$$T^* = T, \qquad U^* = U, \qquad S = T + \mathrm{i}\,U.$$

Demostrar que $T = \operatorname{Re}(S)$, $U = \operatorname{Im}(S)$.

8 Definición. Dados $R, S \in \mathcal{B}(H)$, el operador $RS - SR$ se llama el *conmutador* de R y S y se denota por $[R, S]$.

Obviamente, dos operadores R, S conmutan si, y sólo si, $[R, S] = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

9 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$. *Entonces*

$$[S, S^*] = -2\,\mathrm{i}[\mathrm{Re}(S), \mathrm{Im}(S)]. \tag{1}$$

Demostración. Notamos que $S^* = \mathrm{Re}(S) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(S)$,

$$\begin{aligned} S\,S^* &= (\mathrm{Re}(S) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(S))(\mathrm{Re}(S) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(S)) = \mathrm{Re}(S)^2 + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(S)\,\mathrm{Re}(S) - \mathrm{Re}(S)\,\mathrm{Im}(S)),\\ S^*S &= (\mathrm{Re}(S) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(S))(\mathrm{Re}(S) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(S)) = \mathrm{Re}(S)^2 + \mathrm{i}(\mathrm{Re}(S)\,\mathrm{Im}(S) - \mathrm{Im}(S)\,\mathrm{Re}(S)).\end{aligned}$$

De aquí se sigue (1). $\square$

10 Proposición (criterio de operador normal en términos de su parte real e imaginaria)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) S *es normal;*

(b) $\mathrm{Re}(S)\,\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(S)\,\mathrm{Re}(S)$.

Demostración. En efecto, la condición (a) significa que se anula el lado izquierdo de (1), y la condición (b) significa que se anula el lado derecho de (1). $\square$

11 Proposición (sobre la imagen y el núcleo del operador normal y su adjunto)**.** *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$ *tal que* S *es normal. Entonces* $\ker(S^*) = \ker(S)$,

$$\mathrm{im}(S)^\perp = \ker(S), \qquad \ker(S)^\perp = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(S)).$$

Demostración. La igualdad $\ker(S^*) = \ker(S)$ se sigue de la Proposición 3. En efecto,

$$u \in \ker(S^*) \quad\Longleftrightarrow\quad \|S^*u\| = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \|Su\| = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad u \in \ker(S).$$

Luego

$$\mathrm{im}(S)^\perp = \ker(S^*) = \ker(S), \qquad \mathrm{cl}(\mathrm{im}(S)) = (\mathrm{im}(S)^\perp)^\perp = \ker(S)^\perp.$$ $\square$

De la Proposición 11 se sigue que $\mathrm{cl}(\mathrm{im}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(S^*))$. En realidad, se tiene la igualdad $\mathrm{im}(S^*) = \mathrm{im}(S)$, pero su demostración es más complicada.

12 Proposición. *Sea* $S \in \mathcal{B}(H)$ *tal que* S *es normal. Entonces* $\mathrm{im}(S)$ *es denso en* H *si, y sólo si,* S *es inyectivo.*

Demostración. En efecto,

$$\mathrm{cl}(\mathrm{im}(S)) = H \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathrm{cl}(\mathrm{im}(S))^\perp = \{0_H\} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \ker(S) = \{0_H\}.$$ $\square$

13 Definición. Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que S es *acotado por abajo* o *estrictamente inyectivo* si existe $\delta > 0$ tal que para cada x en H se tiene la desigualdad $\|Sx\| \geq \delta \|x\|$.

14 Proposición. *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Supongamos que S es acotado por abajo. Entonces S es inyectivo y su imagen $\operatorname{im}(S)$ es un subespacio cerrado de H.*

Demostración. Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\operatorname{im}(S)$. Para cada k encontramos x_k en H tal que $y_k = Sx_k$. Entonces

$$\|x_j - x_k\| \leq \frac{1}{\delta}\|y_j - y_k\|,$$

así que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Denotamos su límite por u. Como

$$\|y_k - Su\| \leq \|S\| \, \|x_k - u\|,$$

concluimos que la sucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge al vector Su. □

15 Proposición. *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Supongamos que S es invertible. Entonces S es acotado por abajo.*

Demostración. En efecto, para cada x en H tenemos

$$\|x\| = \|S^{-1}Sx\| \leq \|S^{-1}\| \, \|Sx\|. \qquad \square$$

16 Proposición (criterio de invertibilidad del operador normal)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que S es normal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *S es invertible;*
- *S es acotado por abajo.*

Demostración. Supongamos que S es acotado por abajo. Entonces S es inyectivo. Además,

$$\operatorname{im}(S) = \operatorname{cl}(\operatorname{im}(S)) = \ker(S)^\perp = \{0_H\}^\perp = H. \qquad \square$$

17 Proposición (sobre los valores y vectores propios del operador normal y su adjunto)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal. Sean $u \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $Su = \lambda u$. Entonces $S^*u = \overline{\lambda} u$.*

Demostración. Es fácil ver que $\lambda I - S$ es normal. Luego

$$u \in \ker(\lambda I - S) = \ker((\lambda I - S)^*) = \ker(\overline{\lambda} I - S^*),$$

esto es, $S^* u = \overline{\lambda} u$. $\square$

18 Proposición (ortogonalidad de los vectores propios del operador normal, asociados a diferentes valores propios)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal y sean $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $Sx = \alpha x$, $Sy = \beta y$, $\alpha \neq \beta$. Entonces $x \perp y$.*

Demostración.

$$\alpha \langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle = \langle x, \overline{\beta} y\rangle = \beta \langle x, y\rangle.$$

Como $\alpha \neq \beta$, concluimos que $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

19 Problema. ¿Cómo caracterizar los operadores normales en términos de sus formas sesquilineales o sus formas cuadráticas?