Elementos normales en álgebras C*

1 Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad y sea $a \in \mathcal{A}$.

1. Se dice que a es *normal* si $a^*a = a^*a$.
2. Se dice que a es *autoadjunto* si $a^* = a$.
3. Se dice que a es *unitario* si $a^*a = aa^* = e$.
4. Se dice que a es *proyección* si $a^2 = a$ y $a = a^ast$.
5. Se dice que a es *positivo* si existe b en $\mathcal{A}$ tal que $a = b^*b$.

2 Lema. *Sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $ab = ba$. Entonces $r(ab) \le r(a)r(b)$.*

Demostración. Como $(ab)^n = a^n b^n$,

$$\|(ab)^n\| \le \|a^n\| \, \|b^n\|,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{1/n} \le \left(\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}\right) \left(\lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n}\right). \qquad \square$$

3 Ejemplo. La condición $ab = ba$ es esencial. En el álgebra $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $r(A) = r(B) = 0$, pero $r(AB) = 1$.

4 Proposición (el radio espectral de elementos normales)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad y sea a un elemento normal en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$r(a) = \|a\|.$$

Demostración. 1. Primero suponemos que $a = a^*$. Entonces

$$\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

y por inducción sobre n

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}.$$

Por la fórmula para el radio espectral,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|a\|.$$

2. Sea a normal. Entonces a^*a es autoadjunto y

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \le r(a^*)r(a) = r(a)^2,$$

y la desigualdad inversa también se cumple. $\square$

5 Proposición (unicidad de la norma en álgebra C*)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad y sea $\|\cdot\|_1$ una norma en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ con la norma $\|\cdot\|_1$ también es álgebra C^*. Entonces $\|a\|_1 = \|a\|$ para cada a en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces a^*a es un elemento autoadjunto, luego

$$\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$ $\square$

6 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$, a unitario. Entonces*

$$\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathbb{T}.$$

Demostración. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$, entonces $|\lambda| \le \|a\| = 1$. Por otro lado,

$$\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(a^{-1}) = \mathrm{Sp}(a^*),$$

así que $|1/\lambda| \le \|a^*\| = \|a\| = 1$, y $|\lambda| \ge 1$. $\square$

7 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$, $a^* = a$. Entonces*

$$\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Escribimos λ como $\lambda = \xi + \mathrm{i}\,\eta$, con $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos

$$b_k := a + \mathrm{i}\,k\eta e.$$

Entonces

$$b_k^* b_k = (a - \mathrm{i}\,k\eta e)(a + \mathrm{i}\,k\eta e) = a^2 + k^2\eta^2 e.$$

Además, $\lambda + \mathrm{i}\,k\eta \in \mathrm{Sp}(b_k)$. Luego

$$\xi^2 + (k+1)^2\eta^2 = |\lambda + \mathrm{i}\,k\eta|^2 \le r(b_k)^2 \le \|b_k\|^2 = \|b_k^* b_k\| = \|a^2 + k^2\eta^2 e\| \le \|a\|^2 + k^2\eta^2,$$

y

$$(2k+1)\eta^2 \le \|a\|^2 - \xi^2.$$

Esta desigualdad debe cumplirse para cada k en $\mathbb{N}$, luego $\eta = 0$. $\square$