La norma inducida por un producto interno

Objetivos. Definir la norma inducida por un producto interno y demostrar sus propiedades elementales.

Prerrequisitos. Desigualdad de Schwarz, el concepto de norma.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ya hemos demostrado la *desigualdad* de Schwarz: para cada a, b en H

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle. \tag{1}$$

Recordemos también que

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle a, b \rangle) + \langle b, b \rangle \tag{2}$$

y que para cualquier número complejo z

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|. \tag{3}$$

1 Proposición. *Definimos $N \colon H \to [0, +\infty)$ mediante la regla*

$$N(a) := \sqrt{\langle a, a \rangle}. \tag{4}$$

Entonces N es una norma en H.

Demostración. 1. Mostremos la propiedad subaditiva. Sean $a, b \in H$. Acotamos $N(a+b)^2$ usando (2), (3) y (1):

$$\begin{aligned} N(a+b)^2 &= N(a)^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle a, b \rangle) + N(b)^2 \leq N(a)^2 + 2|\langle a, b \rangle + N(b)^2 \\ &\leq N(a)^2 + 2N(a)N(b) + N(b)^2 = (N(a) + N(b))^2. \end{aligned}$$

Al sacar la raíz cuadrada, obtenemos la propiedad subaditiva para N.

2. Verifiquemos la propiedad homogénea absoluta.

$$N(\lambda a)^2 = \langle \lambda a, \lambda a \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle a, a \rangle = |\lambda|^2 N(a)^2.$$

Al sacar la raíz cuadrada, obtenemos $N(\lambda a) = |\lambda| N(a)$.

3. Si $a \in H \setminus \{0_H\}$, entonces $\langle a, a \rangle > 0$ y $N(a) > 0$. $\square$

En vez de $N(a)$, por lo común se escribe $\|a\|$. H siempre se considera como espacio normado con esta norma (inducida por el producto interno), con la métrica

$$d(a,b) := \|a-b\| = \sqrt{\langle a-b, a-b\rangle},$$

y con la topología inducida por esta métrica. Ya sabemos que en cualquier espacio normado las operaciones lineales y la norma son funciones continuas.

2 Proposición. *El producto interno es una función continua $H \times H \to \mathbb{C}$.*

Demostración. Sean $a, b \in H$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x, y \in H$ obtenemos la siguiente cota superior (basada en la desigualdad de Schwarz):

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle| &= |\langle x,y\rangle - \langle x,b\rangle + \langle x,b\rangle - \langle a,b\rangle| \\ &\le |\langle x, y-b\rangle| + |\langle x-a, b\rangle| \le \|x\|\,\|y-b\| + \|x-a\|\,\|b\| \\ &\le (\|a\| + \|x-a\|)\,\|y-b\| + \|x-a\|\,\|b\|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pongamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \|a\| + \|b\| + \varepsilon}.$$

Notemos que $0 < \delta < 1$. Si $\|x-a\| < \delta$ y $\|y-b\| < \delta$, entonces

$$|\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle| \le (\|a\| + \|b\| + \delta)\delta < \varepsilon. \qquad \square$$

3 Corolario. *Sean $a, b \in H$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H que convergen a los puntos a y b, respectivamente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle.$$

Como ya hemos visto, la forma cuadrática, asociada a una forma sesquilineal, satisface la identidad de paralelogramo, y la forma sesquilineal se puede reconstruir a partir de su forma cuadrática por medio de la identidad de polarización. El producto interno es una forma sesquilineal, y la norma inducida es la raíz cuadrada de su forma cuadrática. Por lo tanto, se cumplen la identidad de paralelogramo y la identidad de polarización:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2). \tag{5}$$

$$\langle a,b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\ \|a + \mathrm{i}^k\, b\|^2. \tag{6}$$

4 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$. Demostrar que en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ no existe producto interno que induzca la norma $\| \cdot \|_p$. Sugerencia: verificar que

$$\|e_1 + e_2\|_p^2 + \|e_1 - e_2\|_p^2 \neq 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2).$$

Una tarea adicional: demostrar que si V es un espacio vectorial complejo normado, en el cual la norma satisface la identidad de paralelogramo, entonces en V se puede construir un producto interno que induce la norma original.