1. La métrica natural en el dominio de un EHNR

Definición 1. Decimos que una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en algun espacio Y, *separa puntos* si dados $x, y \in Y$, con $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Si la familia $\mathcal{F}$ consiste de transformaciones lineales, entonces es equivalente que separe puntos a que si $x_0 \neq 0$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

Definición 2. Sea H un espacio de Hilbert de funciones sobre X, que separa puntos, con núcleo reproductor k_x, definamos una métrica sobre el dominio X como

$$d_1(x, y) = \|k_x - k_y\|, \qquad \forall x, y \in X.$$

Veamos que en efecto cumple las propiedades de una métrica.

- $d_1(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y, \in X$: $d_1(x, y) = \|k_x - k_y\| \geq 0$, por propiedades de la norma esto se cumple para todo $x, y \in X$.

- Si $x, y \in X$ y $d_1(x, y) = 0$, entonces $x = y$: $d_1(x, y) = \|k_x - k_y\| = 0$ si y sólo si $k_x = k_y$, otra vez por propiedades de la norma y del hecho que H es un espacio de funciones que separan puntos, sabemos que existe $f \in H$ tal que si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, usemos esta función y lo ya visto que $k_x = k_y$:

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle = \langle f, k_x \rangle = f(y),$$

  implica que que $x = y$

- $d_1(x, y) = d_1(y, x), \quad \forall x, y, \in X$: $d_1(x, y) = \|k_x - k_y\| = \|k_y - k_x\| = d_1(y, x)$, por la simetría de la norma.

- Desigualdad triangular: Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$d_1(x, y) = \|k_x - k_y\| \leq \|k_x - k_z\| + \|k_z - k_y\| = d_1(x, z) + d_1(z, y),$$

  la desigualdad se da una vez más por propiedades de la norma.

Definición 3. Sea H un espacio de Hilbert de funciones sobre X, que separa puntos, con núcleo reproductor k_x, definamos una métrica sobre el dominio X como

$$d_2(x, y) = |\mathrm{eval}_x - \mathrm{eval}_y|, \qquad \forall x, y \in X.$$

Veamos ahora que d_1 es equivalente a d_2 en X.
Sean $x, y \in X$, para toda $f \in H$ tenemos

$$|\text{eval}_x f - \text{eval}_y f| = |f(x) - f(y)| = |\langle f, k_x \rangle - \langle f, k_x \rangle| = |\langle f, k_x - k_y \rangle| \leq \|f\| \|k_x - k_y\|,$$

notemos que la tercera igualdad se da de la propiedad reproductora del núcleo, la desigualdad se tiene por Schwarz. Esto implica que el funcional $|\text{eval}_x - \text{eval}_y|$ es acotado y $\|k_x - k_y\|$ es una cota superior, ahora si tomamos $f = k_x - k_y$ tenemos la igualdad en la desigualdad de Shwarz, esto es

$$|\text{eval}_x(k_x - k_y) - \text{eval}_y(k_x - k_y)| = \|k_x - k_y\| \|k_x - k_y\|,$$

por lo tanto $|\text{eval}_x - \text{eval}_y| = \|k_x - k_y\|$, lo que es lo mismo $d_1(x, y) = d_2(x, y)$, para todo $x, y \in X$.

Definición 4. Sea H un espacio de Hilbert de funciones sobre X, que separa puntos, con núcleo reproductor k_x, definamos una métrica sobre el dominio X como

$$d_3(x, y) = \sup_{f \in H,\ \|f\|=1} |f(x) - f(y)|, \qquad \forall x, y \in X.$$

Mostremos que d_3 es equivalente a d_1: Sean $x, y \in X$

$$d_3(x, y) = \sup_{f \in H,\ \|f\|=1} |f(x) - f(y)| = |\text{eval}_x - \text{eval}_y| = \|k_x - k_y\|.$$

La última igualdad se da por la demostración de la equivalencia de d_2 con d_1. De lo anterior se desprende que $d_3(x, y) = d_2(x, y) = d_1(x, y)$ para todas $x, y \in X$.