Sucesiones monótonas de conjuntos

Objetivos. Estudiar la estructura de las sucesiones crecientes y decrecientes de conjuntos.

Requisitos. Familias monótonas de conjuntos, propiedades de operaciones con conjuntos.

Estructura de sucesiones crecientes de conjuntos

1. El conjunto de los números naturales es bien ordenado (repaso). Se sabe que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. Es una de las formas del principio de inducción. Tarea adicional: usando solamente la inducción matemática demostrar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

https://proofwiki.org/wiki/Equivalence_of_Well-Ordering_Principle_and_Induction

2. Lema (de una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia). Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ y $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J \coloneqq \Big\{ n \in \{1, 2, \ldots\} \colon\ x \in A_n \Big\}.$$

Entonces:

1. $J \neq \varnothing$.

2. J tiene un único elemento mínimo que denotemos por p.

3. $p \leq k$.

4. $J = \mathbb{N}_p$, donde $\mathbb{N}_p \coloneqq \{j \in \mathbb{Z} \colon\ j \geq p\} = \{p, p+1, p+2, \ldots\}$.

Demostración. 1. Por la hipótesis, $k \in J$.

2. Como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es bien ordenado y J es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, el conjunto J tiene un único elemento mínimo. Lo denotemos por p.

3. Como $k \in J$ y p es el elemento mínimo de J, tenemos que $p \leq k$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \leq p$, entonces de la construcción de p sigue que $n \notin J$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq p$, entonces $x \in A_p \subset A_n$, así que $n \in J$. $\square$

El siguiente teorema permite pasar de una sucesión creciente de conjuntos a una sucesión disjunta que tiene la misma unión. Este teorema se usa para mostrar varias propiedades de medidas, en particular, la *continuidad por abajo* y luego la *propiedad subaditiva*.

3. Teorema (de una sucesión creciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas). Sea $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vació:

$$\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Denotamos por $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sus diferencias sucesivas:

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad D_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}.$$

Entonces:

1. Los conjuntos D_n son disjuntos a pares.
2. Para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $\quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$.

Demostración. 1. Sean $p, q \in \{1, 2, \ldots\}$, $p < q$. Demostremos que $D_p \cap D_q = \varnothing$. Notemos que $p \le q-1$ y por lo tanto $A_p \subset A_{q-1}$. De la definición de D_p sigue que $D_p \subset A_p \subset A_{q-1}$, y de la definición de D_q sigue que $D_q \cap A_{q-1} = \varnothing$.

2. Para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$D_k \subset A_k \subset A_n.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k \subset A_n.$$

Para demostrar la contención inversa, supongamos que $x \in A_n$. Tenemos que encontrar un índice $p \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in D_p$. Definimos el conjunto de índices J como en el Lema:

$$J \coloneqq \Big\{ k \in \{1, 2, \ldots\} \colon\ x \in A_k \Big\}.$$

Denotemos por p al elemento mínimo de J:

$$p \coloneqq \min(J).$$

Como ya vimos en la demostración del Lema, p existe y $p \le k$. De la construcción de p sigue que $x \in A_p$ y $x \notin A_{p-1}$, lo cual significa que $x \in D_p$.

3. Aplicamos el resultado del inciso 2 y propiedades de la unión. Por un lado, para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos que

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{n} D_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j,$$

así que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

Por otro lado, para todo $j \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos que

$$D_j \subset A_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

así que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad \square$$

4. Otra demostración. El inciso 2 del teorema anterior se puede demostrar de otra manera, por inducción matemática sobre n. Verifiquemos la base de inducción:

$$A_1 = A_1 \setminus \varnothing = A_1 \setminus A_0 = D_1.$$

Suponiendo que $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ (hipótesis de inducción), demostremos que $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k$:

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n) = A_n \cup D_{n+1} \overset{\text{H.I.}}{=\!=\!=} \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k \right) \cup D_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k.$$

5. Proposición (de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y a una sucesión disjunta). Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$B_k \coloneqq \bigcup_{n=1}^{k} A_n,$$

y para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$D_k \coloneqq B_k \setminus B_{k-1}.$$

Entonces:

1. La sucesión $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ es creciente y $B_0 = \varnothing$.
2. La sucesión $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ es disjunta.
3. Para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$,
$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$
4. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$

Estructura de sucesiones decrecientes de conjuntos

6. Lema (de una sucesión decreciente de conjuntos y los índices de pertenencia). Sean $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ y $x \in A_k$. Denotemos por J al conjunto de los índices n tales que $x \in A_n$:

$$J \coloneqq \Big\{ n \in \{1, 2, \ldots\} \colon \; x \in A_n \Big\}.$$

Entonces:

1. $J \neq \varnothing$.

2. Si $J \neq \{1, 2, \ldots\}$, entonces existe un $p \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $p \geq k$ y

$$J = \{1, \ldots, p\}.$$

Idea de demostración. Si $J \neq \{1, 2, \ldots\}$, entonces $\{1, 2, \ldots\} \setminus J$ es un subconjunto no vacío de números naturales. Denotemos su elemento mínimo por q. Usando la hipótesis que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente demostrar que $J = \{1, \ldots, q-1\}$. □

7. Teorema (de una sucesión decreciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas). Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

Denotamos por $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sus diferencias por C la intersección de la sucesión original:

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad D_n \coloneqq A_n \setminus A_{n+1},$$

$$C \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces:

1. Los conjuntos D_n son disjuntos a pares.

2. Para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $D_n \cap C = \varnothing$.

3. Para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$A_n = C \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \right).$$