Algunas demostraciones falsas del teorema de la convergencia monótona (un tema del curso "Análisis real")

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

21 de junio de 2020

Plan

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivo: conocer un par de demostraciones falsas del teorema de la convergencia monótona, para entender mejor una demostración correcta.

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivo: conocer un par de demostraciones falsas del teorema de la convergencia monótona, para entender mejor una demostración correcta.

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida
y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ a la función límite: $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Prerrequisitos:

- el concepto de límite de una sucesión numérica,
- funciones medibles,
- la medibilidad del supremo de una familia numerable de funciones medibles,
- la continuidad de la medida por abajo,
- la medida φ definida como $\varphi(Y) := \int_Y s \, \mathrm{d}\mu$, con s simple medible positiva,
- la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles,
- la monotonía de la integral de Lebesgue.

Sucesiones crecientes de números

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leq a_{n+1}.$$

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama estrictamente creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+1}.$$

Sucesiones crecientes de números

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \le a_{n+1}.$$

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama estrictamente creciente si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+1}.$$

Proposición

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente
si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente
si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

La misma condición de manera formal:

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \le f_{n+1}(x).$$

Sucesión creciente de funciones

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Decimos que esta sucesión de funciones es creciente
si para cada punto x en X, la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

La misma condición de manera formal:

$$\forall x \in X \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

El supremo de una sucesión de funciones medibles

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$.

Definimos $g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Entonces $g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$.

La continuidad de la medida por abajo

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una medida y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en X.

Pongamos

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Entonces

La continuidad de la medida por abajo

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una medida y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en X.

Pongamos

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Entonces

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

La medida definida como una integral

$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) :=$ funciones simples medibles positivas.

Proposición

Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) := \int_Y s \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

La integral de Lebesgue de funciones medibles positivas

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\Phi_f := \left\{ s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : \quad s \le f \right\}.$$

Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu : \quad s \in \Phi_f \right\}.$$

Propiedades monótonas de la integral de Lebesgue

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida
y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ a la función límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración de la parte trivial.

Para cada n en $\mathbb{N}$, de la condición $f_n \leq f_{n+1}$ se sigue que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$.

La sucesión $\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego tiene un límite.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, tenemos $f_n \leq g$, así que

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite cuando n tiende a infinito:

$$\alpha \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Falta demostrar que $\alpha \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Demostración falsa 1

Como $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$, existe m en $\mathbb{N}$ tal que

$$f_m \geq g.$$

Luego para cada $n \geq m$ tenemos $f_n \geq f_m \geq g$,

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración falsa 2

Sea $s \in \Phi_f$. Para cada x en X, tenemos $f_n(x) \to g(x) \geq s(x)$.
Sea $c \in (0,1)$. Entonces, por el Lema elemental 1,

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

Luego para cada $n \geq m$ tenemos $f_n(x) \geq f_m(x) \geq c\, s(x)$,

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X c\, s \, \mathrm{d}\mu = c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasamos al límite: $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$

Hacemos la parte final de la demostración y obtenemos $\alpha \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$

Explicación del error en la demostración falsa 2

Sabemos que

$$\forall x \in X \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

Explicación del error en la demostración falsa 2

Sabemos que

$$\forall x \in X \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

No podemos concluir que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in X \qquad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

Explicación del error en la demostración falsa 2

Sabemos que

$$\forall x \in X \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

No podemos concluir que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in X \qquad f_m(x) \geq c\, s(x).$$

No podemos concluir que

$$\exists m \in \mathbb{N} \qquad f_m \geq c\, s.$$