Teorema de la convergencia monótona

Objetivos. Demostrar el teorema de la convergencia monótona.

Requisitos. Funciones medibles, la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles, la medida definida como la integral de Lebesgue sobre un conjunto de integración variable, la continuidad de medida por abajo.

Aplicaciones. Lema de Fatou, la integral de la suma de dos funciones positivas, la integral de una serie de funciones positivas, la completez del espacio L^p.

1 Definición (sucesión creciente de números)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama *creciente* si $a_n \le a_{n+1}$ para todo n en $\mathbb{N}$.

2 Definición (sucesión estrictamente creciente de números)**.** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ se llama *estrictamente creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para todo n en $\mathbb{N}$.

El concepto de *sucesión creciente de funciones* se define punto a punto.

3 Definición (sucesión creciente de funciones)**.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Decimos que esta sucesión de funciones es *creciente* si para cada punto x en X la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

4 Teorema (teorema de la convergencia monótona de Lebesgue)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ a la función límite:*

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

A continuación está escrita una demostración de este teorema. Para comprender mejor esta demostración necesitamos recordar algunos hechos y hacer algunas observaciones preparatorias.

5 Proposición (la medibilidad del supremo de una sucesión de funciones medibles, repaso)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Definimos $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ como*

$$g(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Notemos que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones, entonces su supremo puntual (la función g) coincide con el límite puntual.

6 Observación. Sea $y \in [0, +\infty)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ una sucesión que tiene un límite mayor o igual a y:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

¿Podemos afirmar que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq y$?

Necesitaremos dos lemas elementales.

7 Lema. *Sean $y \in [0, +\infty)$, $c \in (0, 1)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$ una sucesión que tiene un límite mayor o igual a y:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq y.$$

Entonces existe un m en $\mathbb{N}$ tal que $x_m \geq cy$.

Demostración. Si $y = 0$, entonces la desigualdad $x_n \geq y$ se cumple para cada n, y es suficiente poner $m = 1$. Consideremos el caso principal, cuando $y > 0$. Denotemos $\lim_{n\to\infty} x_n$ por L. Entonces $cy < y \leq L$. Pongamos $\varepsilon := L - cy$. Como $\varepsilon > 0$, por la definición del límite existe un k en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

Pongamos $m := k$. Entonces

$$x_m = x_k > L - \varepsilon = cy. \qquad \square$$

8 Lema. *Sean $a, b \in [0, +\infty]$ tales que $a \geq cb$ para todo $c \in (0, 1)$. Demuestre que $a \geq b$.*

Demostración. Si $b = +\infty$, entonces $a = +\infty$, y la desigualdad se cumple. Consideremos el caso $b < +\infty$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $a < b$. Pongamos

$$c_0 := \frac{a + b}{2b}.$$

Entonces $c_0 \in (0, 1)$. Por la suposición, $a \geq c_0 b$. Pero esto implica que

$$2a \geq \frac{a + b}{b} \cdot b = a + b.$$

Restando a de ambos lados, obtenemos $a \geq b$, lo cual contradice a la suposición $a < b$. $\square$

Demostración del teorema de la convergencia monótona. 1. Empecemos con algunas observaciones triviales. La función g es $\mathcal{F}$-medible, porque es el límite (y el supremo) de una sucesión de funciones medibles. La condición $f_n \leq f_{n+1}$ implica que para todo n en $\mathbb{N}$

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu.$$

Esto significa que la sucesión de integrales $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$ es creciente y por consecuencia tiene un límite. Lo denotemos por α:

$$\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Además, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $f_n \le g$, así que

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Pasando al límite cuando n tiende a infinito, obtenemos

$$\alpha \le \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Falta demostrar que $\alpha \ge \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

2. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ una función simple tal que $s \le g$, y sea c un número arbitrario del intervalo $(0, 1)$. Como $f_n(x) \to g(x) \ge s(x)$, por el Lema 7tenemos que

$$\forall x \in X \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \ge cs(x). \tag{1}$$

Definimos una sucesión de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente regla:

$$B_n \coloneqq \{x \in X \colon \; f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

Entonces $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{F}$. De (1) se sigue que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X.$$

Ahora definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(Y) \coloneqq \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida. Aplicando la continuidad de φ por abajo obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(X) = \int\limits_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

Ahora notemos que

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int\limits_{B_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \int\limits_{B_n} s \, \mathrm{d}\mu.$$

En esta desigualdad pasamos al límite cuando $n \to \infty$:

$$\alpha \ge c \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

3. Como c es un elemento arbitrario de $(0,1)$, por el Lema 8 concluimos que

$$\alpha \ge \int_X s \, \mathrm{d}\mu.$$

La última desigualdad se cumple para toda función simple medible s tal que $0 \le s \le g$. Pasamos al supremo sobre todas s con estas propiedades. Pero este supremo es la definición de la integral de g:

$$\alpha \le \sup \left\{ \int_X s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad s \le f \right\} = \int_X g \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

9 Observación (sobre la demostración del teorema de la convergencia monótona)**.** La demostración es bastante complicada. Para apreciarla más, uno debe comprender que las siguientes "simplificaciones" son falsas:

1. Uno quisiera demostrar que $f_n \ge s$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pero esta desigualdad no se puede demostrar. Puede ser que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x \in X$ tal que $f_n(x) < s(x)$. Más aún, puede ser que $f_n < s$ para todo n. Por eso hay que comparar $f_n(x)$ con $cs(x)$.

2. Uno quisiera demostrar que $f_n \ge cs$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pero esta desigualdad no se puede demostrar. Puede ser que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x \in X$ tal que $f_n(x) < cs(x)$. Por eso trabajamos con los conjuntos B_n.

10 Corolario (la integral de Lebesgue de una función medible positiva es el límite de integrales de una sucesión de funciones simples medibles positivas)**.** *Sabemos que para toda función $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))^{\mathbb{N}}$ tal que $s_n \nearrow f$. Ahora el teorema de la convergencia monótona garantiza que*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

En particular, el límite de la sucesión de integrales $\int_X s_n \, \mathrm{d}\mu$ no depende de la elección de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11 Observación. Algunos autores de libros de análisis real definen la integral de Lebesgue de una función positiva medible mediante la fórmula (2). En aquél camino es necesario demostrar que la integral no depende de la elección de sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pero se simplifica la demostración del teorema de la convergencia monótona.