Clases monótonas de conjuntos

Objetivos. Definir clases monótonas y mostrar su relación con σ-álgebras.

Requisitos. σ-álgebras de conjuntos, anillos y álgebras de conjuntos, semianillos y semiálgebras de conjuntos.

1 Definición (clase monótona de conjuntos)**.** Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{M} \subset 2^X$ se llama *clase monótona* si:

1. Para toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente en $\mathcal{M}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.
2. Para toda sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente en $\mathcal{M}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{M}$.

2 Ejercicio (el conjunto potencia es una clase monótona)**.** Sea X un conjunto. Demostrar que 2^X es una clase monótona.

3 Ejercicio (toda σ-álgebra es una clase monótona)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X. Demostrar $\mathcal{F}$ es una clase monótona sobre X.

4 Proposición. *La intersección de un conjunto de clases monótonas es una clase monótona.*

Idea de demostración. En la definición de clase monótona se utiliza solamente el cuantificador $\forall$ y no se utiliza el cuantificador $\exists$. Dos cuantificadores $\forall$ se intercambian. $\square$

5 Definición (la clase monótona generada por una colección de conjuntos)**.** Sea $\mathcal{C} \subset 2^X$. La *clase monótona generada por* $\mathcal{C}$ se define como la intersección de todas las clases monótonas que están contenidas en 2^X y contienen a $\mathcal{C}$. Por la proposición anterior, esta intersección es una clase monótona. Obviamente, es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$.

6 Teorema (sobre la clase monótona generada por un álgebra)**.** *Sea X un conjunto, sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona generada por $\mathcal{A}$. Entonces $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra.*

Razonamientos motivantes para la idea de demostración. Lo difícil será demostrar que $\mathfrak{M}$ es un anillo. Recordemos que la intersección se expresa a través de la diferencia: $P \cap Q = P \setminus (P \setminus Q)$. Además, $\varnothing \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$. Por lo tanto, nuestro objetivo principal es demostrar que la colección $\mathfrak{M}$ es cerrada bajo las operaciones binarias $\cup$ y $\setminus$. En otras palabras, queremos demostrar que si $P, Q \in \mathfrak{M}$, entonces

$$P \cup Q \in \mathfrak{M}, \qquad P \setminus Q \in \mathfrak{M}, \qquad Q \setminus P \in \mathfrak{M}. \tag{1}$$

El problema es que la definición de $\mathfrak{M}$ no es contructiva. $\mathfrak{M}$ se define como la mínima entre todas las clases monótonas que contienen $\mathcal{A}$. En esta situación es natural definir cierta colección de “conjuntos buenos” y demostrar que esta colección coincide con $\mathfrak{M}$. Tenemos una complicación técnica: las afirmaciones (1) dependen de dos conjuntos, P y Q. Trataremos P como un parámetro y consideraremos los conjuntos Q que son “amigos de P” en el sentido que satisfacen (1). $\square$

Demostración. Para todo $P \subset X$, pongamos

$$\Omega(P) \coloneqq \big\{Q \subset X: \quad P \cup Q \in \mathfrak{M}, \quad P \setminus Q \in \mathfrak{M}, \quad Q \setminus P \in \mathfrak{M}\big\}.$$

I. Sea $P \subset X$. Demostremos que $\Omega(P)$ es una clase monótona. En efecto, sea $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\Omega(P)$. Denotemos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ por V y usemos las siguientes identidades:

$$P \cup V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (P \cup Q_n), \quad P \setminus V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (P \setminus Q_n), \quad V \setminus P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n \setminus P).$$

Los conjuntos $P \cup Q_n$, $P \setminus Q_n$, $Q_n \setminus P$ son elementos de $\mathfrak{M}$. Además, las sucesiones $(P \cup Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Q_n \setminus P)_{n\in\mathbb{N}}$ son crecientes, la sucesión $(P \setminus Q_n)$ es decreciente, y $\mathfrak{M}$ es una clase monótona. Por eso $P \cup V, P \setminus V, V \setminus P \in \mathfrak{M}$, lo cual significa que $V \in \Omega(P)$.

Si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en $\Omega(P)$, entonces de manera similar se demuestra que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \Omega(P)$.

II. Vamos a demostrar que $\mathfrak{M}$ es un anillo. Esta parte de la demostración es una secuencia de juegos lógicos simples.

1. Si $P \in \mathcal{A}$ y $Q \in \mathcal{A}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. En efecto, la suposición implica que los conjuntos $P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P$ son elementos de $\mathcal{A}$. Luego son elementos de $\mathfrak{M}$.

2. Si $P \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subset \Omega(P)$. Es otra forma del inciso anterior.

3. Si $P \in \mathcal{A}$, entonces $\mathfrak{M} \subset \Omega(P)$. En efecto, $\Omega(P)$ es una clase monótona que contiene $\mathcal{A}$, y $\mathfrak{M}$ es la clase monótona más pequeña con esta propiedad.

4. Si $P \in \mathcal{A}$ y $Q \in \mathfrak{M}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Es otra forma del inciso anterior.

5. Si $P, Q \subset X$ y $Q \in \Omega(P)$, entonces $P \in \Omega(Q)$. En efecto, los conjuntos P y Q hacen papeles simétricos en la definición de $\Omega(P)$.

6. Si $P \in \mathfrak{M}$ y $Q \in \mathcal{A}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Sale de los dos incisos anteriores.

7. Si $P \in \mathfrak{M}$, entonces $\mathcal{A} \subset \Omega(P)$. Este inciso es equivalente al inciso anterior.

8. Si $P \in \mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{M} \subset \Omega(P)$. En efecto, $\Omega(P)$ es una clase monótona que contiene $\mathcal{A}$, y $\mathfrak{M}$ es la clase monótona más pequeña con esta propiedad.

9. Si $P, Q \in \mathfrak{M}$, entonces $Q \in \Omega(P)$. Este inciso es equivalente al inciso anterior.

Hemos demostrado que si $P, Q \in \mathfrak{M}$, entonces $P \cup Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \mathfrak{M}$. Además, $\varnothing \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$. Luego $\mathfrak{M}$ es un anillo.

III. Vamos a demostrar que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. Como $\mathfrak{M}$ es un anillo y $X \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$, concluimos que $\mathfrak{M}$ es un álgebra. Ahora sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathfrak{M}$. Entonces la sucesión de las uniones parciales $B_m \coloneqq \bigcup_{m=1}^{n} A_n$ es creciente, y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m \in \mathfrak{M}. \qquad \square$$

El siguiente resultado es un corolario simple del Teorema 6.

7 Teorema (descripción de la σ-álgebra generada por una semiálgebra)**.** *Sea X un conjunto, sea $\mathcal{S}$ una semiálgebra sobre X, es decir, un semianillo sobre X tal que $X \in \mathcal{S}$. Denotemos por $\mathcal{A}$ al álgebra generada por $\mathcal{S}$ y por $\mathfrak{M}$ a la clase monótona mínima que contiene a $\mathcal{A}$. Entonces $\mathfrak{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{S}$.*

Demostración. El Teorema 6 garantiza que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. Además, $\mathfrak{M}$ contiene $\mathcal{S}$. En otras palabras, $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra que contiene $\mathcal{S}$.

Nos falta demostrar que $\mathfrak{M}$ la más pequeña entre todas las σ-álgebras que contienen $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra que contiene $\mathcal{S}$. Queremos mostrar que $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}$.

Primero, recordemos que cada σ-álgebra es álgebra. Por eso $\mathcal{B}$ es un álgebra que contiene $\mathcal{S}$. Pero $\mathcal{A}$ es la mínima entre todas las álgebras que contienen $\mathcal{S}$. Luego $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Segundo, recordemos que cada σ-álgebra es una clase monótona. Por eso $\mathcal{B}$ es una clase monótona que contiene $\mathcal{A}$. Pero $\mathfrak{M}$ es la más pequeña entre todas las clases monótonas que contienen $\mathcal{A}$. Luego $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}$. $\square$