Integrales de funciones monótonas y teoremas del valor medio

1. Teorema (aproximación de funciones decrecientes por funciones numerablemente escalonadas). Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función decreciente (no necesariamente estrictamente decreciente) en I. Sea $\nu \in \mathbb{N}$ dado. Entonces existe una función "numerablemente escalonada"

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \chi_{J_k},$$

donde $\{J_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de intervalos disjuntos a pares cuya reunión es I, tal que:

i) La restricción $\varphi|_I$ es decreciente en I.

ii) $\forall x \in I \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{\nu}$.

iii) $\varphi \ge 0$ si $f \ge 0$.

Demostración. $J_k := \left\{ x \in I\colon \dfrac{k}{\nu} \le f(x) < \dfrac{k+1}{\nu} \right\}, \quad c_k := \dfrac{k}{\nu}$.
En otras palabras,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{\lfloor \nu f(x) \rfloor}{\nu}, & x \in I; \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$$ □

2. Corolario (aproximación de funciones decrecientes en un intervalo compacto por funciones escalonadas). Sea $I = [a,b]$ un invervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función decreciente en I. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una función escalonada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nula fuera de I tal que:

i) La restricción $\varphi|_I$ es decreciente en I.

ii) $\forall x \in I \qquad 0 \le f(x) - \varphi(x) < \frac{1}{\nu}$.

iii) $\varphi \ge 0$ si $f \ge 0$.

3. Teorema (funciones monótonas son medibles).
Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función monótona en I. Entonces:

- f es medible en I;
- f es integrable en todo subintervalo compacto de I.

4. Teorema del valor medio para una función decreciente.
Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una función integrable en $[a,b]$.
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente, no negativa en $[a,b]$.
Entonces la función $fg\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$ y se tiene:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le f(a) \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x g \right|.$$

En el caso particular cuando $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \text{tal que} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

Idea de la demostración. $G(x) := \int_a^x g, \quad K := \max_{a \le x \le b} |G(x)|.$
Si f es escalonada y tiene valor c_k en (a_{k-1}, a_k), entonces

$$\int_a^b fg = \sum_{k=1}^m d_k(G(a_k) - G(a_{k-1})) = d_m G(a_m) + \sum_{k=1}^{m-1} (d_k - d_{k+1}) G(a_k).$$

De allí salen las estimaciones requeridas. En el caso general, aproximar f por una función escalonada. $\square$

5. Segundo teorema del valor medio de O. Bonnet.
Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una función integrable en $[a,b]$.
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a,b]$.
Entonces

$$\left\| \int_a^b fg \right\| \le (|f(a)| + 2|f(b)|) \max_{a \le x \le b} \left\| \int_a^x g \right\|.$$

Si $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g.$$

Idea de la demostración. Si f es decreciente, aplicar el teorema anterior a las funciones g y $f - f(b)$. $\square$