Espacios métricos (definición y ejemplos)

Objetivos. Definir el concepto de un espacio métrico y conocer algunos ejemplos.

Denotamos $[0, +\infty)$ por $\mathbb{R}_+$.

1. Definición (distancia o métrica). Sea X un conjunto. Una función $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$ se llama *distancia* o *métrica* sobre X si se cumplen las siguientes condiciones (*axiomas de métrica*):

D1. *Desigualdad del triángulo*:

$$\forall a, b, c \in X \qquad d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b).$$

D2. *Propiedad simétrica*:

$$\forall a, b \in X \qquad d(a, b) = d(b, a).$$

D3. Para todo $a \in X$, $\quad d(a, a) = 0$.

D4. Para todo $a, b \in X$, $\quad$ si $d(a, b) = 0$, entonces $a = b$.

2. Definición (espacio métrico). Un par ordenado (X, d) se llama *espacio métrico* si X es un conjunto y $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$ es una métrica sobre X.

3. Observación. A veces es cómodo admitir que d tome el valor $+\infty$, pero en este caso se pierden algunas propiedades que involucran la diferencia de las distancias, por ejemplo, la Proposición 8.

4. Observación. Tomando en cuenta que $d(a, b) \ge 0$ para todos $a, b \in X$, la condición D4 se puede escribir de la siguiente manera equivalente:

$$\forall a, b \in X \qquad (a \ne b) \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) > 0.$$

5. Observación. Las condiciones D3 y D4 se pueden juntar:

$$\forall a, b \in X \qquad d(a, b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b.$$

Corolarios simples de la desigualdad del triángulo

6. Proposición (desigualdad poligonal). Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces para cualquier número n en $\{1, 2, \ldots\}$ y cualesquier puntos $a_0, \ldots, a_n$ en X se cumple la desigualdad

$$d(a_0, a_n) \le \sum_{j=0}^{n-1} d(a_j, a_{j+1}).$$

Idea de demostración: inducción matemática sobre n.

7. Sobre una desigualdad con valor absoluto (repaso). Para cualesquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$|\alpha| \le \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad (-\beta \le \alpha) \quad \wedge \quad (\alpha \le \beta). \tag{1}$$

Para demostrar esta regla es suficiente recordar la definición del valor absoluto de números reales y considerar varios casos de manera adecuada.

8. Proposición (desigualdad inversa del triángulo). Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a, b, c \in X$. Entonces

$$\big| d(a, c) - d(b, c) \big| \le d(a, b). \tag{2}$$

Demostración. Aplicamos la desigualdad triangular a los puntos a, b, c:

$$d(a, c) \le d(a, b) + d(b, c),$$

luego pasamos el término $d(b, c)$ al lado izquierdo:

$$d(a, c) - d(b, c) \le d(a, b). \tag{3}$$

Por otro lado, aplicamos la desigualdad triangular a los puntos b, a, c y la propiedad simétrica $d(b, a) = d(a, b)$:

$$d(b, c) \le d(b, a) + d(a, c).$$

Aplicamos la propiedad simétrica $d(b, a) = d(a, b)$ y pasamos los sumandos $d(b, c)$ y $d(a, c)$ a otros lados de la desigualdad:

$$-d(a, b) \le d(a, c) - d(b, c). \tag{4}$$

Según la regla (1), las desigualdades (3) y (4) juntas son equivalentes a (2). $\square$

Ejemplos de métricas y espacios métricos

9. Ejercicio (distancia canónica en $\mathbb{R}$). Denotemos por $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ a la función

$$d(x, y) \coloneqq |x - y|.$$

Demostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}$.

10. Ejercicio (distancia inducida por una norma). Sea E un espacio vectorial (real o complejo) y sea $\|\cdot\|$ una norma en E. Demuestre que la función

$$d(a, b) \coloneqq \|a - b\|$$

es una métrica en E.

11. Ejercicio (distancia de Hamming). Sea A un conjunto y sea n un número entero positivo. Consideramos el conjunto $X = A^n$. La distancia de Hamming $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_+$ se define como el número de los índices $k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $a_k \neq b_k$:

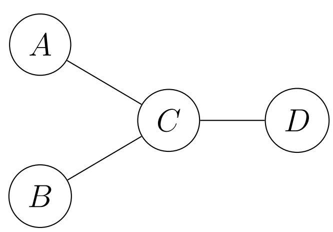
$$d(a, b) = \#\big\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon a_k \neq b_k\big\}.$$

Demostrar que d es una métrica. Sugerencia: primero demostrar que

$$\big\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon a_k \neq b_k\big\} \subseteq \big\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon a_k \neq c_k\big\} \cup \big\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon c_k \neq b_k\big\}.$$

12. Ejercicio (distancia natural en un grafo). Sea (X, E) un grafo no dirigido. En otras palabras, X es un conjunto finito y E es una relación binaria simétrica sobre X. Si $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $x_0, x_1, \ldots, x_m \in X$ y $(x_j, x_{j+1)}) \in E$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, entonces se dice que $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ es un *camino* de *longitud* m que va de x_0 a x_m. Para cualesquier vértices x, y en X, definimos $d(x, y)$ como el ínfimo de las longitudes de los caminos que van de x a y.

Por ejemplo, en el siguiente grafo $d(A, A) = 0$ y $d(A, B) = 2$.



Más general, las aristas pordían tener sus propias longitudes (o "pesos"), entonces la longitud de un camino sería la suma de las longitudes de las aristas. El ínfimo se toma en el conjunto $[0, +\infty]$, por eso si no hay ningún camino de x a y, entonces se pone $d(x, y) = +\infty$. Demostrar que d es una métrica.