Espacios métricos: definición y ejemplos
(un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

17 de agosto de 2022

Objetivos.

- Estudiar la definición del espacio métrico.
- Conocer algunos ejemplos.

Prerrequisitos.

- Experiencia de trabajar con el valor absoluto.
- Experiencia de trabajar con la distancia usual (euclidiana) en el plano.
- Concepto de grafo.

Definición

Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función.

Se dice que d es una distancia en X, si se tienen las siguientes propiedades.

(D1) Desigualdad del triángulo:

$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(D2) Propiedad simétrica:

$$\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x).$$

(D3) Para cada x en X, $\quad d(x, x) = 0$.

(D4) Separación de puntos:

$$\forall x, y \in X \qquad \Big(x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad d(x, y) > 0\Big).$$

Espacio métrico

En vez de la palabra “distancia”, se usa también la palabra “métrica”.

Espacio métrico

En vez de la palabra "distancia", se usa también la palabra "métrica".

Definición

Sea X un conjunto y sea d una distancia en X.

Entonces se dice que (X, d) es un espacio métrico.

La desigualdad poligonal

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X.

Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

La desigualdad poligonal

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x_1, \ldots, x_m$ una lista de puntos en X. Entonces

$$d(x_1, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Idea de demostración. Inducción sobre m. $\square$

La desigualdad inversa del triángulo

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y, z \in X$. Entonces

$$\left| d(x,z) - d(y,z) \right| \leq d(x,y).$$

La desigualdad inversa del triángulo

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y, z \in X$. Entonces

$$\left| d(x,z) - d(y,z) \right| \leq d(x,y).$$

Sugerencia para la demostración: si $t, u \in \mathbb{R}$,

$$|t| \leq u \qquad \Longleftrightarrow$$

La desigualdad inversa del triángulo

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y, z \in X$. Entonces

$$\big|d(x,z) - d(y,z)\big| \leq d(x,y).$$

Sugerencia para la demostración: si $t, u \in \mathbb{R}$,

$$|t| \leq u \qquad \Longleftrightarrow \qquad -u \leq t \quad \wedge \quad t \leq u.$$

La desigualdad de cuadrilátero

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$. Entonces

$$\left| d(a_1, a_2) - d(a_3, a_4) \right| \leq d(a_1, a_3) + d(a_2, a_4).$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

Ejemplos de distancias

Las siguientes distancias se estudian en cursos de cálculo.

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de distancias

Las siguientes distancias se estudian en cursos de cálculo.

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.
- La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos de distancias

Las siguientes distancias se estudian en cursos de cálculo.

- La distancia canónica en $\mathbb{R}$.
- La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$.
- Para cada p en $[1, +\infty)$, la p-ésima distancia en $\mathbb{R}^n$:

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Ejemplo: la distancia de Hamming

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$.

$$d(a, b) = \#\Big\{k \in \{1, \dots, n\}\colon a_k \neq b_k\Big\} \qquad (a, b \in A^n).$$

Demostar que d es una distancia en A^n.

Ejemplo: la distancia de Hamming

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$.

$$d(a,b) = \#\Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ a_k \neq b_k\Big\} \qquad (a,b \in A^n).$$

Demostar que d es una distancia en A^n.

Sugerencia. Dados a, b en A^n, pongamos

$$E_{a,b} \coloneqq \Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ \ a_k = b_k\Big\}, \qquad N_{a,b} \coloneqq \Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ \ a_k \neq b_k\Big\}.$$

Ejemplo: la distancia de Hamming

Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbb{N}$.

$$d(a,b) = \#\Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ a_k \neq b_k\Big\} \qquad (a,b \in A^n).$$

Demostar que d es una distancia en A^n.

Sugerencia. Dados a, b en A^n, pongamos

$$E_{a,b} := \Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ \ a_k = b_k\Big\}, \qquad N_{a,b} := \Big\{k \in \{1,\ldots,n\}\colon\ \ a_k \neq b_k\Big\}.$$

Demostrar que

$$E_{a,c} \cap E_{c,b} \subseteq E_{a,b}, \qquad N_{a,b} \subseteq N_{a,c} \cup N_{c,b}.$$

Ejemplo: la distancia natural en un grafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.

Los elementos de V se llaman vértices y los elementos de E se llaman aristas.

E es un subconjunto de la colección de todos los subconjuntos dos-puntuales de V:

$$E \subseteq \Big\{ \{a, b\} \colon \quad a, b \in V, \quad a \neq b \Big\}.$$

Dados $a, b \in V$, denotamos por $\mathcal{P}(a, b)$ al conjunto de los caminos de a a b:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a, b) := \Big\{ (v_0, v_1, \ldots, v_m) \colon \quad & m \in \mathbb{N}, \quad v_0, v_1, \ldots, v_m \in V, \\ & \big(\forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad \{v_{k-1}, v_k\} \in E\big), \quad v_0 = a, \quad v_m = b \Big\}. \end{aligned}$$

Ejemplo: la distancia natural en un grafo

Dado un camino $p = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{P}(a, b)$, denotemos por $L(p)$ su longitud:

$$L(p) := m.$$

Ejemplo: la distancia natural en un grafo

Dado un camino $p = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{P}(a, b)$, denotemos por $L(p)$ su longitud:

$$L(p) := m.$$

Dados a, b en V, denotamos por $d(a, b)$ el ínfimo de las longitudes de los caminos de a a b:

$$d(a, b) := \inf_{p \in \mathcal{P}(a,b)} L(p).$$

Ejemplo: la distancia natural en un grafo

Dado un camino $p = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{P}(a, b)$, denotemos por $L(p)$ su longitud:

$$L(p) := m.$$

Dados a, b en V, denotamos por $d(a, b)$ el ínfimo de las longitudes de los caminos de a a b:

$$d(a, b) := \inf_{p \in \mathcal{P}(a,b)} L(p).$$

Demostrar que d es una distancia.

Ejemplo: la distancia natural en un grafo

Dado un camino $p = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{P}(a, b)$, denotemos por $L(p)$ su longitud:

$$L(p) := m.$$

Dados a, b en V, denotamos por $d(a, b)$ el ínfimo de las longitudes de los caminos de a a b:

$$d(a, b) := \inf_{p \in \mathcal{P}(a,b)} L(p).$$

Demostrar que d es una distancia.

Sugerencia. Si $p = (v_0, v_1, \ldots, v_r) \in \mathcal{P}(a, c)$, $q = (w_0, w_1, \ldots, w_s) \in \mathcal{P}(c, b)$, entonces

$$(v_0, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s) \in \mathcal{P}(a, b).$$

Ejemplo: la distancia postal

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) := \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Ejemplo: la distancia postal

Definimos $\rho\colon \mathbb{Z}^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) := \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Demostrar que ρ es una distancia.

Subespacio de un espacio métrico

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

Denotamos por d_Y la restricción de d a Y^2:

$$d_Y(a, b) := d(a, b) \qquad (a, b \in Y).$$

Entonces d_Y es una distancia en Y.

Subespacio de un espacio métrico

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

Denotamos por d_Y la restricción de d a Y^2:

$$d_Y(a, b) := d(a, b) \qquad (a, b \in Y).$$

Entonces d_Y es una distancia en Y.

Idea de demostración: las propiedades (D1)–(D4) involucran solamente el cuantificador $\forall$.

Se cumplen para todos los puntos en X, luego para todos los puntos en Y.

Subespacio de un espacio métrico

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.
Denotamos por d_Y la restricción de d a Y^2:

$$d_Y(a, b) := d(a, b) \qquad (a, b \in Y).$$

Entonces d_Y es una distancia en Y.

Idea de demostración: las propiedades (D1)–(D4) involucran solamente el cuantificador $\forall$.
Se cumplen para todos los puntos en X, luego para todos los puntos en Y.

En esta situación, se dice que (Y, d_Y) es subespacio del espacio métrico (X, d).
La distancia d_Y se llama la distancia inducida por d en Y.

Ejemplos de subespacios métricos

- $\mathbb{Z}$ con la distancia canónica. Es subespacio métrico de $\mathbb{R}$.

Ejemplos de subespacios métricos

- $\mathbb{Z}$ con la distancia canónica. Es subespacio métrico de $\mathbb{R}$.
- $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es subespacio métrico de $\mathbb{R}$.

Ejemplos de subespacios métricos

- $\mathbb{Z}$ con la distancia canónica. Es subespacio métrico de $\mathbb{R}$.
- $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es subespacio métrico de $\mathbb{R}$.
- $[a, b] \times [c, d]$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.
  Se considera con la distancia euclidiana de $\mathbb{R}^2$.