Medidas: definición, ejemplos y propiedades elementales (un tema de análisis real")

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

20 de marzo de 2024

Objetivos:

- definir el concepto de una medida;
- conocer un par de ejemplos simples;
- demostrar algunas propiedades elementales.

Prerrequisitos:

- σ-álgebras de conjuntos;
- conjuntos numerables y no numerables;
- el concepto de una unión disjunta de intervalos;
- series de números;
- el eje real extendido;
- propiedades de operaciones con conjuntos.

Sucesiones disjuntas de conjuntos, repaso

Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos.

Decimos que los elementos de la sucesión son disjuntos por pares

o brevemente que la sucesión es disjunta si

$$\forall j,k\in\mathbb{N} \qquad (j\neq k) \quad \Longrightarrow \qquad (A_j\cap A_k=\emptyset).$$

Medida (definición)

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X.

Una función $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ se llama medida si

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ es σ-aditiva: para cualquier sucesión disjunta $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$,

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Notemos que el lado izquierdo de esta igualdad está bien definido, pues $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

Ambos lados de esta igualdad pueden ser iguales a $+\infty$.

Espacios medibles, espacios de medida

Un par $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible, si

- X es un conjunto,
- $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X.

Espacios medibles, espacios de medida

Un par $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible, si

- X es un conjunto,
- $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X.

Una terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, si

- X es un conjunto,
- $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X,
- $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida.

Medidas complejas (cargas)

Ejercicio. Buscar en libros la definición de medidas complejas (cargas).

Medidas de probabilidad

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.
La medida μ se llama medida de probabilidad si $\mu(X) = 1$.

En este caso $(X, \mathcal{F}, \mu)$ se llama espacio de probabilidad.

Ejemplo de medida: medida de conteo

Sea X un conjunto. Pongamos $\mathcal{F} = 2^X$.

Definimos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito;} \\ |A|, & \text{si } A \text{ es finito.} \end{cases}$$

Aquí $|A|$ es el número de elementos del conjunto A, esto es, la cardinalidad de A.

Notemos que si A es infinito, entonces $\mu(A)$ se define como $+\infty$ y **no** se define como $|A|$.
Hay varias cardinalidades infinitas, y $+\infty$ es otro objeto.

Ejemplo de medida: medida de conteo

Hay que demostrar la propiedad σ-aditiva:

si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta con valores en 2^X, y $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, entonces

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Se recomienda considerar dos casos:

- B es finito;
- B es infinito.

Ejemplo: medida de Dirac

Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} = 2^X$ y $x_0 \in X$.

Definamos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in A; \\ 0, & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Ejercicio: verificar que μ es una medida.

Ejemplo con conjuntos numerables y sus complementos

Sea X un conjunto no numerable.

$$\mathcal{N} := \{\, Y \subseteq X\colon \quad Y \text{ es finito o numerable} \}.$$

Como ya hemos visto, la siguiente colección de conjuntos es una σ-álgebra sobre X:

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X\colon \quad A \in \mathcal{N} \quad \vee \quad A^c \in \mathcal{N}\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & A^c \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Ejercicio: demostrar que μ es σ-aditiva.

¿El único conjunto de medida 0 es el conjunto vacío?

Ejercicio.

Dar ejemplos de espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y conjuntos $A \in \mathcal{F}$, tales que

$$A \neq \emptyset, \qquad \mu(A) = 0.$$

¿El único conjunto de medida 0 es el conjunto vacío?

Ejercicio.

Dar ejemplos de espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y conjuntos $A \in \mathcal{F}$, tales que

$$A \neq \emptyset, \qquad \mu(A) = 0.$$

Uno de los **errores imperdonables** en análisis real: afirmar que

$$\mu(A) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \emptyset.$$

Propiedad aditiva (finitamente aditiva)

Suponemos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Proposición

Sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos a pares, es decir, $A_j \cap A_k = \emptyset$ siempre que $j \neq k$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

Propiedad aditiva (finitamente aditiva)

Suponemos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Proposición

Sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos a pares, es decir, $A_j \cap A_k = \emptyset$ siempre que $j \neq k$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

Demostración:

poner $A_j := \emptyset$ para $j \geq m+1$,

aplicar la propiedad σ-aditiva y la propiedad $\mu(\emptyset) = 0$.

La medida del complemento

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ *tales que* $A \subseteq B$. *Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

La medida del complemento

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

Demostración: Es fácil ver que

$$A \cup (B \setminus A) = B, \qquad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Usamos el hecho que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las diferencias de conjuntos:

$$B \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Aplicamos la propiedad aditiva a los conjuntos A y $B \setminus A$.

La medida del complemento expresada como una resta

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ *tales que* $A \subseteq B$ *y* $\mu(A) < +\infty$*. Entonces*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) \setminus \mu(A).$$

Propiedad creciente

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ *tales que* $A \subseteq B$. *Entonces* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Propiedad creciente

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Demostración:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Lema

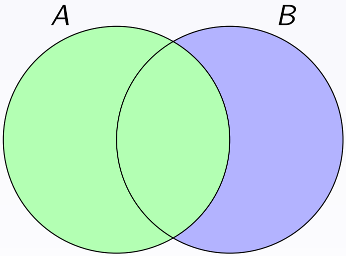
Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Lema

Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

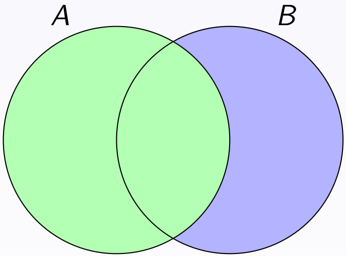
$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$



Lema

Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$



Una parte de demostración:

p	q	$p \vee q$	$q \wedge \overline{p}$	$p \vee (q \wedge \overline{p})$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

Lema

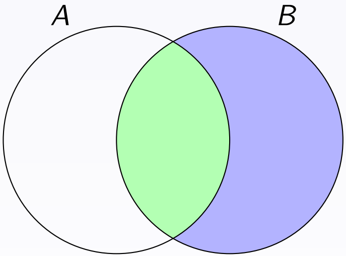
Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Lema

Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

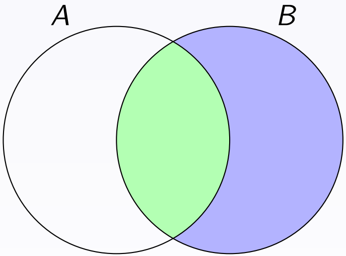
$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$



Lema

Sean A y B algunos conjuntos. Entonces

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$



Una parte de demostración:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge \overline{p}$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge \overline{p})$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Sobre la medida de la unión e intersección

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$. *Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Sobre la medida de la unión e intersección

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Demostración. Por los lemas,

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \qquad A \cap (B \setminus A) = \emptyset,$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A), \qquad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Luego

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Es importante la suposición que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra (en particular, es importante que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo los complementos)

Ejercicio.

$$X = \{0, 1\}, \qquad \mathcal{F} = \Big\{\emptyset, \{1\}, X\Big\},$$

$$\mu(\emptyset) = 0, \qquad \mu(\{1\}) = 5, \qquad \mu(X) = 2.$$

Mostrar que μ es σ-aditiva, pero μ no es creciente.

En este ejemplo $\mathcal{F}$ no es σ-álgebra, y μ no se puede llamar medida.

¿Podemos quitar la condición que $\mu(\emptyset) = 0$?

Ejercicio.

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

Pongamos $\mu(Y) \coloneqq +\infty$ para cada Y en $\mathcal{F}$.

Mostrar que μ es σ-aditiva.

¿Podemos quitar la condición que $\mu(\emptyset) = 0$?

Ejercicio.

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

Pongamos $\mu(Y) := +\infty$ para cada Y en $\mathcal{F}$.

Mostrar que μ es σ-aditiva.

Ejercicio.

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

Supongamos que $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ tiene las siguientes propiedades:

- μ es sigma-aditiva,
- existe Y en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) < +\infty$.

Mostrar que $\mu(\emptyset) = 0$.