

Medidas: definición, ejemplos  
y propiedades elementales  
(un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

18 de marzo de 2021

## Objetivos:

- definir el concepto de una medida;
- conocer un par de ejemplos simples;
- demostrar algunas propiedades elementales.

## Prerrequisitos:

- $\sigma$ -álgebras de conjuntos;
- conjuntos numerables y no numerables;
- el concepto de una unión disjunta de intervalos;
- series de números;
- el eje real extendido;
- propiedades de operaciones con conjuntos.

## Sucesiones disjuntas de conjuntos, repaso

Sea  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos.

Decimos que los elementos de la sucesión son disjuntos por pares

o brevemente que la sucesión es disjunta si

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k) \implies (A_j \cap A_k = \emptyset).$$

## Medida (definición)

Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

Una función  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  se llama **medida** si

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva: para cualquier sucesión disjunta  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ ,

$$\mu \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Notemos que el lado izquierdo de esta igualdad está bien definido, pues  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$ .

Ambos lados de esta igualdad pueden ser iguales a  $+\infty$ .

## Espacios medibles, espacios de medida

Un par  $(X, \mathcal{F})$  es un **espacio medible**, si

- $X$  es un conjunto,
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

## Espacios medibles, espacios de medida

Un par  $(X, \mathcal{F})$  es un **espacio medible**, si

- $X$  es un conjunto,
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

Una terna  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  es un **espacio de medida**, si

- $X$  es un conjunto,
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ ,
- $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida.

## Medidas complejas (cargas)

**Ejercicio.** Buscar en libros la definición de medidas complejas (cargas).

## Medidas de probabilidad

Sea  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida.

La medida  $\mu$  se llama **medida de probabilidad** si  $\mu(X) = 1$ .

En este caso  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  se llama **espacio de probabilidad**.



## Ejemplo de medida: medida de conteo

Sea  $X$  un conjunto. Pongamos  $\mathcal{F} = 2^X$ .

Definimos  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\mu(A) := \begin{cases} +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito;} \\ |A|, & \text{si } A \text{ es finito.} \end{cases}$$

Aquí  $|A|$  es el número de elementos del conjunto  $A$ , esto es, la cardinalidad de  $A$ .

Notemos que si  $A$  es infinito, entonces  $\mu(A)$  se define como  $+\infty$  y **no** se define como  $|A|$ .

Hay varias cardinalidades infinitas, y  $+\infty$  es otro objeto.

## Ejemplo de medida: medida de conteo

Hay que demostrar la propiedad  $\sigma$ -aditiva:

si  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión disjunta con valores en  $2^X$ , y  $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ , entonces

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Se recomienda considerar dos casos:

- $B$  es finito;
- $B$  es infinito.

## Ejemplo: medida de Dirac

Sea  $X$  un conjunto, sea  $\mathcal{F} = 2^X$  y  $x_0 \in X$ .

Definamos  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  de la siguiente manera:

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in A; \\ 0, & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

**Ejercicio:** verificar que  $\mu$  es una medida.

## Ejemplo con conjuntos numerables y sus complementos

Sea  $X$  un conjunto no numerable.

$$\mathcal{N} := \{Y \subseteq X: Y \text{ es finito o numerable}\}.$$

Como ya hemos visto, la siguiente colección de conjuntos es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ :

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X: A \in \mathcal{N} \vee A^c \in \mathcal{N}\}.$$

Definimos  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  mediante la regla

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & A^c \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

**Ejercicio:** demostrar que  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva.

¿El único conjunto de medida 0 es el conjunto vacío?

**Ejercicio.**

Dar ejemplos de espacios de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  y conjuntos  $A \in \mathcal{F}$ , tales que

$$A \neq \emptyset, \quad \mu(A) = 0.$$

¿El único conjunto de medida 0 es el conjunto vacío?

**Ejercicio.**

Dar ejemplos de espacios de medida  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  y conjuntos  $A \in \mathcal{F}$ , tales que

$$A \neq \emptyset, \quad \mu(A) = 0.$$

Uno de los **errores imperdonables** en análisis real: afirmar que

$$\mu(A) = 0 \quad \implies \quad A = \emptyset.$$

## Propiedad aditiva (finitamente aditiva)

Suponemos  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida.

### Proposición

Sean  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$  conjuntos disjuntos a pares, es decir,  $A_j \cap A_k = \emptyset$  siempre que  $j \neq k$ .

Entonces

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^m A_j \right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

## Propiedad aditiva (finitamente aditiva)

Suponemos  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida.

### Proposición

Sean  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$  conjuntos disjuntos a pares, es decir,  $A_j \cap A_k = \emptyset$  siempre que  $j \neq k$ .

Entonces

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^m A_j \right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

### Demostración:

poner  $A_j := \emptyset$  para  $j \geq m + 1$ ,

aplicar la propiedad  $\sigma$ -aditiva y la propiedad  $\mu(\emptyset) = 0$ .



## La medida del complemento

### Proposición

*Sean  $A, B \in \mathcal{F}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

## La medida del complemento

### Proposición

Sean  $A, B \in \mathcal{F}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

**Demostración:** Es fácil ver que

$$A \cup (B \setminus A) = B, \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Usamos el hecho que  $\mathcal{F}$  es cerrada bajo las diferencias de conjuntos:

$$B \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Aplicamos la propiedad aditiva a los conjuntos  $A$  y  $B \setminus A$ .

## La medida del complemento expresada como una resta

### Proposición

Sean  $A, B \in \mathcal{F}$  tales que  $A \subseteq B$  y  $\mu(A) < +\infty$ . Entonces

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

## Propiedad creciente

### Proposición

*Sean  $A, B \in \mathcal{F}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .*

## Propiedad creciente

### Proposición

Sean  $A, B \in \mathcal{F}$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

### Demostración:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

## Lema

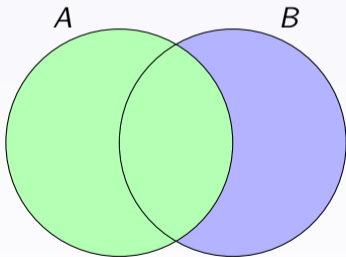
Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

## Lema

Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

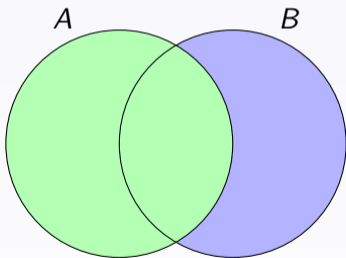
$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$



## Lema

Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$



Una parte de demostración:

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \wedge \bar{p}$	$p \vee (q \wedge \bar{p})$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1



## Lema

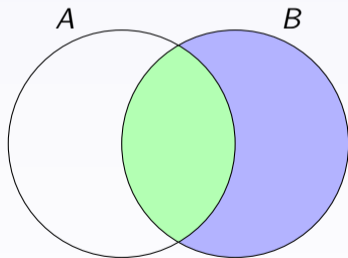
Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

## Lema

Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

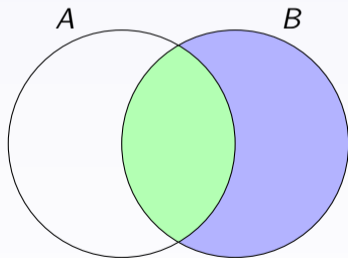
$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$



## Lema

Sean  $A$  y  $B$  algunos conjuntos. Entonces

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$



Una parte de demostración:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge \bar{p}$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge \bar{p})$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

## Sobre la medida de la unión e intersección

### Proposición

*Sean  $A, B \in \mathcal{F}$ . Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

## Sobre la medida de la unión e intersección

### Proposición

Sean  $A, B \in \mathcal{F}$ . Entonces

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

**Demostración.** Por los lemas,

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset,$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A), \quad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Luego

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

Es importante la suposición que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra  
(en particular, es importante que  $\mathcal{F}$  es cerrada bajo los complementos)

**Ejercicio.**

$$X = \{0, 1\}, \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, X\},$$
$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\{1\}) = 5, \quad \mu(X) = 2.$$

Mostrar que  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, pero  $\mu$  no es creciente.

En este ejemplo  $\mathcal{F}$  no es  $\sigma$ -álgebra, y  $\mu$  no se puede llamar medida.

¿Podemos quitar la condición que  $\mu(\emptyset) = 0$ ?

**Ejercicio.**

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un espacio medible.

Pongamos  $\mu(Y) := +\infty$  para cada  $Y$  en  $\mathcal{F}$ .

Mostrar que  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva.

¿Podemos quitar la condición que  $\mu(\emptyset) = 0$ ?

**Ejercicio.**

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un espacio medible.

Pongamos  $\mu(Y) := +\infty$  para cada  $Y$  en  $\mathcal{F}$ .

Mostrar que  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva.

**Ejercicio.**

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un espacio medible.

Supongamos que  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  tiene las siguientes propiedades:

- $\mu$  es sigma-aditiva,
- existe  $Y$  en  $\mathcal{F}$  tal que  $\mu(Y) < +\infty$ .

Mostrar que  $\mu(\emptyset) = 0$ .