Medidas

Objetivos. Definir la noción de medidas y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Sigma-álgebras de conjuntos, series de números, conjuntos numerables y no numerables, sucesiones monótonas de conjuntos.

1 Definición (sucesión disjunta de conjuntos)**.** Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Decimos que *los elementos de la sucesión son disjuntos por pares* o brevemente que la *sucesión es disjunta* si

$$\forall j,k\in\mathbb{N}\qquad (j\neq k)\quad\Longrightarrow\qquad A_j\cap A_k=\varnothing.$$

2 Definición (medida)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X. Una función $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ se llama *medida* si $\mu(\varnothing)=0$ y μ es σ-aditiva. Lo último significa que para cualquier sucesión disjunta $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ se cumple la igualdad

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu(A_j).$$

Notemos que el lado izquierdo de esta igualdad está bien definido pues $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\in\mathcal{F}$. Ambos lados de esta igualdad pueden ser iguales a $+\infty$.

3 Definición (medida compleja o carga)**.** La definición es similar, pero $\mu\colon\mathcal{F}\to\mathbb{C}$.

4 Ejercicio. Sea $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ una función σ-aditiva tal que $\mu(A)<+\infty$ para algún $A\in\mathcal{F}$. Demuestre que $\mu(\varnothing)=0$.

Ejemplos simples de medidas

En cada uno de los siguientes ejemplos hay que demostrar que μ es una medida.

5 Ejemplo (medida de conteo)**.** Sea X un conjunto. Pongamos $\mathcal{F}=2^X$ y definamos la función $\mu\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A):=\begin{cases}+\infty, & \text{si } A \text{ es infinito;}\\ |A|, & \text{si } A \text{ es finito.}\end{cases}$$

Aquí $|A|$ es el número de elementos del conjunto A, esto es, la cardinalidad de A.

6 Ejemplo. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} = 2^X$ y sea $x_0 \in X$. Definamos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in A; \\ 0, & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

7 Ejemplo. Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos o numerables de X. Como ya hemos visto, la siguiente colección de conjuntos es una σ-álgebra sobre X:

$$\mathcal{F} := \big\{ A \subset X\colon \quad A \in \mathcal{N} \quad \vee \quad A^c \in \mathcal{N} \big\}.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & A^c \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Propiedades elementales de las medidas

Suponemos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X y que $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida.

8 Proposición (propiedad aditiva)**.** *Sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos, es decir, $A_j \cap A_k = \varnothing$ siempre que $j \neq k$. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

9 Proposición. *Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

10 Proposición (propiedad monótona)**.** *Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

11 Proposición. *Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$ y $\mu(A) < +\infty$. Entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

12 Proposición. *Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$