# La medida de la unión de una sucesión creciente (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

21 de marzo de 2021

**Objetivos:**

- demostrar el teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos;
- dar una idea de demostración del teorema sobre la medida de la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos.

**Prerrequisitos:**

- estructura de sucesiones crecientes de conjuntos;
- definición de medidas y sus propiedades elementales;
- series de números.

**Proposición (sobre la estructura de una sucesión creciente de conjuntos, repaso)**

*Sea* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente de conjuntos, esto es,* $A_k \subseteq A_{k+1}$ *para cada* $k$ *en* $\mathbb{N}$*.*
*Pongamos* $A_0 := \emptyset$,

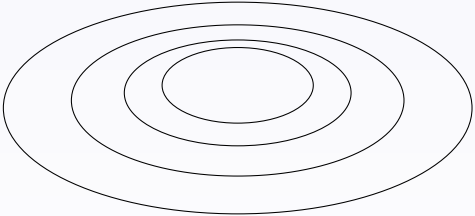
$$D_k := A_k \setminus A_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

*Entonces:*

1) *la sucesión* $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es disjunta;*
2) *para cada* $m$ *en* $\mathbb{N}$,
$$A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k,$$
3) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k.$

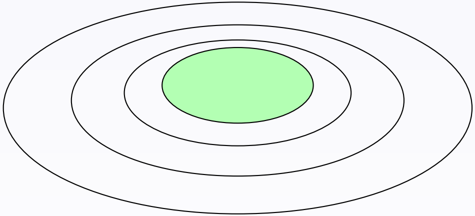
# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

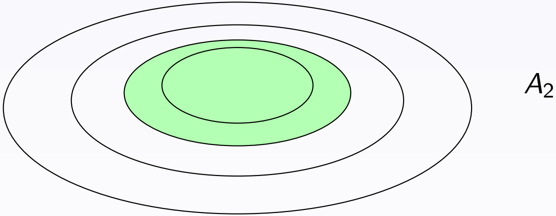
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



$A_1$

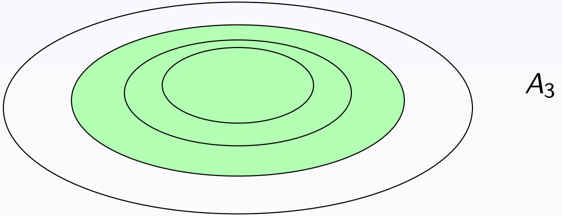
# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}.$$



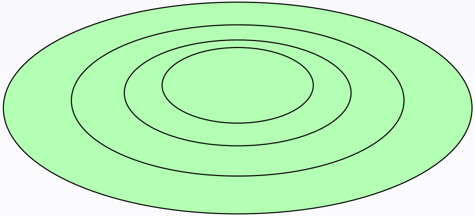
# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

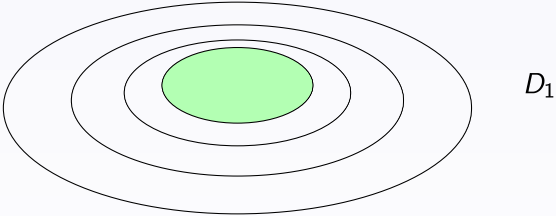
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



$A_4$

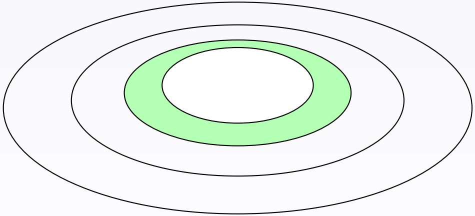
# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

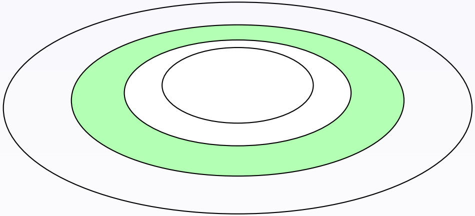
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}.$$



$D_2$

# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

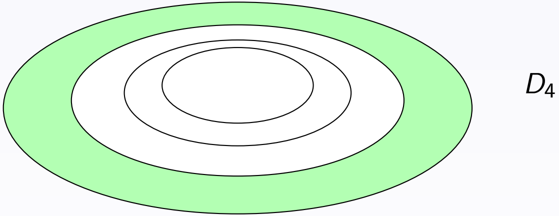
$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



$D_3$

# Dibujo: los conjuntos $A_k$ y $D_k$

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots, \qquad D_k := A_k \setminus A_{k-1}.$$



### Teorema (sobre la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos)

*Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{F}$*. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

Para cada $m$ en $\mathbb{N}$ tenemos $A_m \subseteq A_{m+1}$, luego

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

Para cada $m$ en $\mathbb{N}$ tenemos $A_m \subseteq A_{m+1}$, luego $\mu(A_m) \leq \mu(A_{m+1})$,

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

Para cada $m$ en $\mathbb{N}$ tenemos $A_m \subseteq A_{m+1}$, luego $\mu(A_m) \le \mu(A_{m+1})$,
luego la sucesión $(\mu(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente, y su límite existe.

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

Para cada $m$ en $\mathbb{N}$ tenemos $A_m \subseteq A_{m+1}$, luego $\mu(A_m) \le \mu(A_{m+1})$, luego la sucesión $(\mu(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente, y su límite existe.

Pongamos $A_0 := \emptyset$, y para cada $k$ en $\mathbb{N}$ definimos $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$.

# Inicio de la demostración

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Como $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $B \in \mathcal{F}$, así que $\mu(B)$ está definida.

Para cada $m$ en $\mathbb{N}$ tenemos $A_m \subseteq A_{m+1}$, luego $\mu(A_m) \leq \mu(A_{m+1})$,
luego la sucesión $(\mu(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente, y su límite existe.

Pongamos $A_0 := \emptyset$, y para cada $k$ en $\mathbb{N}$ definimos $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$.
Como $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra, tenemos $D_k \in \mathcal{F}$.

# Demostración, razonamiento principal

$$\boxed{(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}}$$

# Demostración, razonamiento principal

$$\boxed{(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}} \qquad \boxed{D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}}$$

# Demostración, razonamiento principal

$\boxed{(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}}$ $\boxed{D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

$$\mu\Bigg(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Bigg)$$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \;=\!=\!=\!=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k)$$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k)$$

$\mu$ es $\sigma$-aditiva

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k)$$

$\mu$ es $\sigma$-aditiva

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) \;=\; \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k)$$

$\mu$ es $\sigma$-aditiva

definición de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$$

$\mu$ es $\sigma$-aditiva

definición de $\sum_{k=1}^{\infty}$

# Demostración, razonamiento principal

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \quad A_k \in \mathcal{F}$

$D_k := A_k \setminus A_{k-1}, \quad D_k \in \mathcal{F}$

Proposición sobre la estructura de sucesiones crecientes

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$

$(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es disjunta

$\forall m \in \mathbb{N} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^{m} D_k$

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \underset{\mu \text{ es } \sigma\text{-aditiva}}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) \underset{\text{definición de } \sum_{k=1}^{\infty}}{=\!=\!=} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k) \underset{\mu \text{ es aditiva}}{=\!=\!=} \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$$

# El título poético del teorema: continuidad de $\mu$ por abajo

Para memorizar el enunciado del teorema, uno puede decir de manera poética que
los conjuntos $A_k$ se "acercan" al conjunto $B$ por abajo,
y el teorema afirma la "continuidad por abajo" de $\mu$.

# El título poético del teorema: continuidad de $\mu$ por abajo

Para memorizar el enunciado del teorema, uno puede decir de manera poética que
los conjuntos $A_k$ se "acercan" al conjunto $B$ por abajo,
y el teorema afirma la "continuidad por abajo" de $\mu$.

Sin embargo, en este curso

- no definimos ninguna topología en $\mathcal{F}$ ni en $2^X$;
- no definimos la convergencia de sucesiones de conjuntos;
- no vamos a demostrar ningún resultado general sobre la continuidad de $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$.

# El título poético del teorema: continuidad de $\mu$ por abajo

Para memorizar el enunciado del teorema, uno puede decir de manera poética que los conjuntos $A_k$ se "acercan" al conjunto $B$ por abajo, y el teorema afirma la "continuidad por abajo" de $\mu$.

Sin embargo, en este curso

- no definimos ninguna topología en $\mathcal{F}$ ni en $2^X$;
- no definimos la convergencia de sucesiones de conjuntos;
- no vamos a demostrar ningún resultado general sobre la continuidad de $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$.

Uno de los errores imperdonables en este curso es razonar así:

como $A_m \to B$, concluimos que $\mu(A_m) \to \mu(B)$.

# Ejemplo: la situación triste con sucesiones decrecientes

Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$, donde $\nu$ es la medida de conteo.

## Ejemplo: la situación triste con sucesiones decrecientes

Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$, donde $\nu$ es la medida de conteo.

Consideremos $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $Q$:

$$P_k \;\coloneqq\; \{j \in \mathbb{N}\colon \quad j \geq k\}, \qquad Q \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k.$$

- La sucesión $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
- Para cada $k$ en $\mathbb{N}$, $\quad \nu(P_k) = +\infty$.
- $Q = \emptyset \quad$ y $\quad \nu(Q) = 0$.

$$\lim_{k\to\infty} \nu(P_k) = +\infty \quad \neq \quad 0 = \nu(Q).$$

**Ejercicio.** Dar otro ejemplo de un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y de una sucesión decreciente $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}$ tales que

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_k\right) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(P_k).$$

### Teorema (sobre la medida de una sucesión decreciente)

*Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión decreciente en* $\mathcal{F}$*.*

*Supongamos que*

$$\mu(P_1) < +\infty.$$

*Entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(P_k).$$

Título poético del teorema: "continuidad de medida por arriba".

# Ejercicios: dos caminos de demostración

Se propone construir dos demostraciones diferentes
del teorema sobre la medida de una sucesión decreciente.

# Ejercicios: dos caminos de demostración

Se propone construir dos demostraciones diferentes
del teorema sobre la medida de una sucesión decreciente.

A. Aplicar el teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente.

$$A_k :=$$

# Ejercicios: dos caminos de demostración

Se propone construir dos demostraciones diferentes
del teorema sobre la medida de una sucesión decreciente.

A. Aplicar el teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente.

$$A_k := P_1 \setminus P_{k+1},$$

# Ejercicios: dos caminos de demostración

Se propone construir dos demostraciones diferentes
del teorema sobre la medida de una sucesión decreciente.

A. Aplicar el teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente.

$$A_k := P_1 \setminus P_{k+1},$$

B. Aplicar el resultado sobre la estructura de una sucesión decreciente.

Considerar los conjuntos

$$E_k := P_k \setminus P_{k+1}, \qquad C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} P_k.$$

Completez del espacio $L^p$

Teorema de la convergencia dominada

Lema de Fatou

Teorema de la convergencia monótona

Propiedad $\sigma$-subaditiva de medida

Medida de la unión de una suc. creciente

Propiedad $\sigma$-aditiva de medida