Completación de una medida

Objetivos. Definir el concepto de medida completa y demostrar que toda medida posee una completación.

Requisitos. σ-álgebra, medida.

1. Definición (medida completa). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es *completa* si para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ y para todo $B \subset A$ se tiene que $B \in \mathcal{F}$.

2. Definición (completación de una medida). Sea X un conjunto y sean $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $\nu\colon \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medidas sobre X. Se dice que ν es una *completación* de μ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, ν es completa y $\nu(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$.

3. Lema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $E \subset X$ y $A, B \in \mathcal{F}$ conjuntos tales que

$$A \subset E \subset B, \qquad \mu(B \setminus A) = 0.$$

Entonces

$$\mu(A) = \mu(B) = \sup\big\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subset E\big\} = \inf\big\{\mu(G)\colon G \in \mathcal{F},\ G \supset E\big\}.$$

Demostración. Por la propiedad aditiva, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A)$.

Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset E$. Entonces $F \subset B$ y por lo tanto $\mu(F) \le \mu(B)$. Esto significa que $\mu(B)$ es el máximo del conjunto

$$\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subset E\}.$$

De manera similar, $\mu(A)$ es el mínimo del conjunto

$$\{\mu(F)\colon G \in \mathcal{F},\ G \supset E\}. \qquad \square$$

4. Teorema (completación de una medida). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces existe una σ-álgebra $\widetilde{\mathcal{F}}$ sobre X y una medida completa $\widetilde{\mu}\colon \widetilde{\mathcal{F}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tales que $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mu}$ es completa y $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$.

Demostración. I. Definamos $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}$. Pongamos

$$\widetilde{\mathcal{F}} \coloneqq \big\{E \subset X\colon \quad \exists A, B \in \mathcal{F} \quad A \subset E \subset B \quad \wedge \quad \mu(B \setminus A) = 0\big\}.$$

Para todo $E \in \widetilde{\mathcal{F}}$ definamos $\widetilde{\mu}(E)$ mediante la fórmula:

$$\widetilde{\mu}(E) = \inf\big\{\mu(G)\colon G \in \mathcal{F},\ E \subset G\big\}.$$

Por el lema, el ínfimo se alcanza y es igual con el siguiente supremo que también se alcanza:

$$\widetilde{\mu}(E) = \sup\big\{\mu(F)\colon F \in \mathcal{F},\ F \subset E\big\}.$$

II. Si $E \in \mathcal{F}$, entonces poniendo $A = B = E$ tenemos que $A \subset E \subset B$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, así que $E \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$. Esto quiere decir que $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ y la función $\widetilde{\mu}$ es una *extensión* de la función μ.

III. Demostremos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra.

$X \in \widetilde{\mathcal{F}}$ porque $X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$.

Sea $E \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Elijamos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset E \subset B$ y $\mu(B \setminus A) = 0$. Entonces $B^c \subset E^c \subset A^c$,

$$A^c \setminus B^c = B \setminus A$$

y por lo tanto $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$, así que $E^c \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\widetilde{\mathcal{F}}$. Elijamos $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$A_n \subset E_n \subset B_n, \qquad \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Pongamos

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Entonces $C \subset F \subset D$ y

$$D \setminus C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap C^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap C^c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n),$$

por lo tanto

$$\mu(D \setminus C) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

y $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

IV. Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es una medida.

Como $\varnothing \in \mathcal{F}$, $\widetilde{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es σ-aditiva. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\widetilde{\mathcal{F}}$ de conjuntos disjuntos y sean A_n, B_n, C, D, F como antes. Si $j \ne k$, entonces

$$A_j \cap A_k \subset E_j \cap E_k = \varnothing,$$

así que los elementos de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos. Por lo tanto

$$\widetilde{\mu}(F) = \mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E_n).$$

V. Demostremos que $\widetilde{\mu}$ es completa. Sean $A \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y $E \subset X$ tales que $\widetilde{\mu}(A) = 0$ y $E \subset A$. Entonces por la definición de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mu}$ existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Como $\varnothing \subset E \subset B$ y $\mu(B \setminus \varnothing) = 0$, concluimos que $E \in \widetilde{F}$. $\square$

5. Ejercicio (pseudodistancia entre conjuntos inducida por una medida exterior). Sea $\varphi\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida exterior. Definimos $d\colon 2^X \times 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mediante la regla

$$d(A, B) := \varphi(A \triangle B).$$

Demuestre que d es una pseudodistancia en 2^X, esto es,

- $d(A, B) \geq 0$ para cualesquiera A, B en 2^X,
- $d(A, A) = 0$ para cualquier A en 2^X,
- $d(A, B) = d(B, A)$ para cualesquiera A, B en 2^X,
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ para cualesquiera A, B, C en 2^X.

6. Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\mu^*\colon 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ la medida exterior generada por μ. Definimos d como en el ejercicio anterior. Por otro lado, sea $\widetilde{\mathcal{F}}$ la σ-álgebra definida en el teorema sobre la completación de medida:

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \big\{E \subset X\colon \quad \exists A, B \in \mathcal{F} \quad A \subset E \subset B \quad \wedge \quad \mu(B \setminus A) = 0\big\}.$$

Demuestre que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es la cerradura de $\mathcal{F}$ respecto a la pseudométrica d.