Funciones medibles

Objetivos. Definir la noción de funciones (aplicaciones) medibles, estudiar sus criterios y propiedades básicas.

Requisitos. σ-álgebras, preimagen de un conjunto bajo una función, propiedades de preimágenes.

1 Definición (función $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medible)**.** Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{H})$ espacios medibles. Una función $f\colon X\to Y$ se llama $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-*medible* si para todo $B\in\mathcal{H}$ se tiene que $f^{-1}[B]\in\mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y,\mathcal{H})$ el conjunto de todas las funciones $X\to Y$ que son $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medibles:

$$\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y,\mathcal{H}) := \Big\{f\in Y^X\colon\quad \forall B\in\mathcal{H}\quad f^{-1}[B]\in\mathcal{F}\Big\}.$$

2 Lema (la imagen de una σ-álgebra; pushforward σ-algebra)**.** *Sean X,Y algunos conjuntos, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X y $f\colon X\to Y$. Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de los subconjuntos de Y cuyas preimágenes bajo f pertenecen a $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{C} = \big\{B\subseteq Y\colon f^{-1}[B]\in\mathcal{A}\big\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra sobre Y.

Demostración. La demostración es directa; hay que aplicar la definición de σ-álgebra y propiedades de preimágenes. Por ejemplo, supongamos que $B\in\mathcal{C}$ y demostremos que $Y\setminus B\in\mathcal{C}$.

$$f^{-1}[Y\setminus B] = \{x\in X\colon\ f(x)\notin B\} = \{x\in X\colon\ x\notin f^{-1}[B]\} = X\setminus f^{-1}[B].$$

Por la definición de $\mathcal{C}$, tenemos que $f^{-1}[B]\in\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, concluimos que $f^{-1}[Y\setminus B]\in\mathcal{A}$. Ahora por la definición de $\mathcal{C}$ se obtiene que $Y\setminus B\in\mathcal{C}$. □

3 Teorema (criterio de que una función es medible)**.** *Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{H})$ espacios medibles y sea $f\colon X\to Y$. Supongamos que la σ-álgebra $\mathcal{H}$ está generada por una colección $\mathcal{G}\subseteq 2^Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-$\mathcal{H}$-medible, esto es, $f^{-1}[B]\in\mathcal{F}$ para cada B en $\mathcal{H}$;

(b) $f^{-1}[B]\in\mathcal{F}$ para cada B en $\mathcal{G}$.

Demostración. La implicación (a)⇒(b) es trivial pues $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{H}$. Supongamos (b) y demostremos (a). Definamos $\mathcal{C}$ como en el lema anterior:

$$\mathcal{C} := \big\{B\subseteq Y\colon\ f^{-1}[B]\in\mathcal{F}\big\}.$$

Entonces la condición (b) implica que $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{C}$. Además, por el Lema, $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra. Como $\mathcal{H}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, obtenemos la contención $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{C}$. Pero esto equivale a la condición (a). □

Funciones medibles con valores en un espacio topológico

4 Definición (función $\mathcal{F}$-medible)**.** Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible y sea Y un espacio topológico. Una función $f\colon X\to Y$ se llama $\mathcal{F}$-*medible*, si para todo conjunto Borel-medible B del espacio Y su preimagen $f^{-1}[B]$ pertenece a $\mathcal{F}$. Notación: $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y)$.

5 Proposición. *Sean $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible, Y un espacio topológico, $f\colon X\to Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es medible, esto es, $f^{-1}[C]\in\mathcal{F}$ para cada conjunto C Borel-medible en Y.

(b) $f^{-1}[C]\in\mathcal{F}$ para cada conjunto C abierto en Y.

6 Proposición (relación entre funciones continuas y medibles)**.** *Sean X, Y espacios topológicos. Denotemos por τ_X y τ_Y las topologías correspondientes, y por $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ las σ-álgebras de Borel en estos espacios topológicos. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X tal que $\mathcal{B}_X\subseteq\mathcal{F}$. Entonces cada función continua $X\to Y$ es $\mathcal{F}$–$\mathcal{B}_Y$-medible:*

$$C(X,Y)\subseteq\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y,\mathcal{B}_Y).$$

Composiciones de funciones medibles

Recordemos que si $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, $C\subseteq Z$, entonces

$$(g\circ f)^{-1}[C]=f^{-1}[g^{-1}[C]].$$

7 Proposición (composición de funciones medibles es medible)**.** *Sean $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$, $(Z,\mathcal{H})$ espacios medibles, y sean $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y,\mathcal{G})$, $g\in\mathcal{M}(Y,\mathcal{G},Z,\mathcal{H})$. Entonces, $g\circ f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Z,\mathcal{H})$.*

8 Proposición (composición de una función medible con una función continua)**.** *Sean $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible, Y,Z espacios topológicos, $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y)$ y $g\in C(Y,Z)$. Entonces, $g\circ f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Z)$.*

Medibilidad de funciones características

9 Definición (función característica de un conjunto)**.** Sea X un conjunto y sea Y un subconjunto de X. Entonces la función $1_Y\colon X\to\mathbb{R}$, definida mediante

$$1_Y(x):=\begin{cases}1, & x\in Y,\\ 0, & x\in X\setminus Y,\end{cases}$$

se llama la *función característica* (o la *función indicadora*) del conjunto Y.

Por supuesto, esta función depende también de X, y una notación más precisa sería $1_{X,Y}$, pero por lo común el conjunto X es fácil identificar por el contexto.

10 Proposición (criterio de medibilidad de la función indicadora)**.** *Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible y sea $A\subseteq X$. Entonces 1_A es $\mathcal{F}$-medibles si y sólo si $A\in\mathcal{F}$.*