Medibilidad sobre productos cartesianos

Objetivos. Estudiar el concepto de la medibilidad de funciones definidas en productos de espacios de medida.

Requisitos. σ-álgebras, funciones medibles, clases monótonas.

1 Definición ("rectángulos")**.** Sean X, Y conjuntos. Cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se llama *rectángulo* en $X \times Y$.

2 Definición ("rectángulos medibles")**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, se llama *rectángulo medible* en $X \times Y$.

Previamente demostramos el siguiente resultado. Se recomienda recordar su demostración.

3 Proposición (los rectángulos medibles forman un semianillo)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces la colección*

$$\mathcal{R} \coloneqq \{A \times B \colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$$

es un semianillo.

4 Definición (producto de σ-álgebras)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con σ-álgebras. Se denota por $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{R}$, es decir, por todos los rectángulos medibles.

5 Proposición (descripción del anillo generado por un semianillo, repaso)**.** *Dado un semianillo de conjuntos $\mathcal{S}$, el anillo generado por $\mathcal{S}$ consiste de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$.*

6 Definición (conjuntos elementales)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con σ-álgebras. Denotamos por $\mathcal{E}$ al anillo generado por la colección $\mathcal{R}$. Los elementos de $\mathcal{E}$ se llaman *conjuntos elementales*.

7 Proposición (descripción más contructiva de los conjuntos elementales)**.** *$\mathcal{E}$ es un álgebra de conjuntos sobre $X \times Y$. $\mathcal{E}$ consiste de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{R}$.*

Demostración. $X \times Y \in \mathcal{R}$, por eso $X \times Y \in \mathcal{E}$. La descripción de los elementos de $\mathcal{E}$ se sigue de la Proposición 5. □

8 Definición (clase monótona de conjuntos, repaso)**.** Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de conjuntos. Se dice que $\mathcal{F}$ es una *clase monótona* si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones de sucesiones crecientes de conjuntos y bajo intersecciones de sucesiones decrecientes de conjuntos.

9 Proposición (descripción de la σ-álgebra generada en términos de clases monótonas, repaso)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos y sea $\mathcal{M}$ la clase monótona más pequeña que contiene $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

10 Teorema. *$\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 9. □

Medibilidad de las secciones de conjuntos medibles

11 Definición (secciones de conjuntos)**.** Sea $E \subseteq X \times Y$. Para cada a en X, pongamos

$$E_a \coloneqq \{y \in Y\colon \quad (a,y) \in E\},$$

y para cada b en Y, pongamos

$$E^b \coloneqq \{x \in X\colon \quad (x,b) \in E\}.$$

12 Ejercicio (las rectas verticales y horizontales en términos de las proyecciones)**.** Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ mediante las reglas

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y.$$

Sea $a \in X$. Demostrar que

$$\{a\} \times Y = \pi_1^{-1}[\{a\}].$$

Sea $b \in Y$. Demostrar que

$$X \times \{b\} = \pi_2^{-1}[\{b\}].$$

13 Ejercicio (las secciones de conjuntos en términos de las proyecciones)**.** Sean $E \subseteq X \times Y$, $a \in X$, $b \in Y$. Expresar E_a y E^b en términos de E, a, b, π_1 y π_2.

14 Lema (sobre las secciones de un rectángulo)**.** *Sean $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $x \in X$. Pongamos $C \coloneqq A \times B$. Entonces,*

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \varnothing, & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Demostración. Notemos que

$$(x,y) \in C \qquad \iff \qquad (x \in A) \ \wedge \ (y \in B).$$

1. Consideremos el caso $x \in A$. Para cada y en B tenemos que $(x,y) \in C$, y para cada y en $Y \setminus B$ tenemos que $(x,y) \notin C$. Luego

$$C_x = \{y \in Y\colon \ (x,y) \in C\} = B.$$

2. Consideremos el caso $x \in X \setminus A$. Para cada y en Y tenemos que $(x,y) \notin C$, luego

$$C_x = \{y \in Y\colon (x,y) \in C\} = \varnothing. \qquad \square$$

15 Lema (secciones y uniones de conjuntos)**.** *Sean X, Y conjuntos, sea $(C_j)_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $X \times Y$, y sea $x \in X$. Pongamos*

$$D \coloneqq \bigcup_{j\in J} C_j.$$

Entonces,

$$D_x = \bigcup_{j\in J} (C_j)_x.$$

Demostración.

$$D_x = \left\{ y \in Y \colon \ (x,y) \in \bigcup_{j\in J} C_j \right\} = \left\{ y \in Y \colon \ \exists j \in J \quad (x,y) \in C_j \right\}$$
$$= \bigcup_{j\in J} \left\{ y \in Y \colon \ (x,y) \in C_j \right\} = \bigcup_{j\in J} (C_j)_x. \qquad \square$$

16 Lema. *Sean X, Y conjuntos, sea $C \subseteq X \times Y$, y sea $x \in X$. Entonces,*

$$\Big((X \times Y) \setminus C \Big)_x = Y \setminus C_x.$$

Demostración.

$$\Big((X \times Y) \setminus C \Big)_x = \left\{ y \in Y \colon \ (x,y) \notin C \right\} = \left\{ y \in Y \colon \ y \notin C_x \right\} = Y \setminus C_x. \qquad \square$$

17 Ejercicio. Demostrar los Lemas 14, 15, 16 usando el resultado del Ejercicio 13.

18 Ejercicio. Enunciar y demostrar análogos de Lemas 14, 15, 16 para las "secciones horizontales".

19 Teorema (sobre la medibilidad de las secciones de un conjunto medible)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ conjuntos con σ-álgebras. Entonces, para cada E en $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$,*

$$\forall x \in X \qquad E_x \in \mathcal{G}$$

y

$$\forall y \in Y \qquad E^y \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Demostremos solamente la afirmación sobre E_x. Sea

$$\Omega \coloneqq \{ C \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \colon \quad \forall x \in X \quad C_x \in \mathcal{G} \}.$$

Del Lema 14 se sigue que $\mathcal{R} \subseteq \Omega$.

Probemos que Ω es una σ-álgebra.

- $X \times Y \in \Omega$. En efecto, como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son σ-álgebras, tenemos que $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathcal{G}$, $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \Omega$.
- Sea $C \in \Omega$. Para cada x en X, aplicamos el Lema 16 y la suposición que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra. y obtenemos que

  $$\Big((X \times Y) \setminus C \Big)_x = Y \setminus C_x \in \mathcal{G}.$$

  Concluimos que $(X \times Y) \setminus C \in \Omega$.

- Sea $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$. Pongamos $D \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Para x en X, aplicamos el Lema 15 y la suposición que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra:

$$D_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (C_k)_x \in \mathcal{G}.$$

  Concluimos que $D \in \Omega$.

Hemos mostrado que Ω es una σ-álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles. Por lo tanto, $\mathcal{F}\times\mathcal{G} \subseteq \Omega$. Para cada E en $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$, tenemos que $E \in \Omega$, esto es, $E_x \in \mathcal{G}$ para cada x en X. □

20 Ejercicio. Construir un ejemplo, cuando la medibilidad de las secciones E_x y E^y no implica la mediblidad del conjunto E. En otras palabras, encontrar espacios medibles $(X,\mathcal{F})$, $(Y,\mathcal{G})$ y un conjunto $E \subseteq X\times Y$ tales que

$$\Big(\forall x \in X \quad E_x \in \mathcal{G}\Big) \quad\wedge\quad \Big(\forall y \in Y \quad E^y \in \mathcal{F}\Big) \quad\wedge\quad \Big(E \notin \mathcal{F}\times\mathcal{G}\Big).$$

Medibilidad de secciones de funciones

21 Definición (secciones de funciones)**.** Sea $f\colon X\times Y \to \mathbb{C}$. Para cada x en X, definamos $f_x\colon Y \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall y \in Y \qquad f_x(y) = f(x,y).$$

Para cada y en Y, definamos $f^y\colon X \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall x \in X \qquad f^y(x) = f(x,y).$$

22 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{M}(X\times Y, \mathcal{F}\times\mathcal{G}, \mathbb{C})$. Entonces*

$$\forall x \in X \qquad f_x \in \mathcal{M}(Y,\mathcal{G},\mathbb{C})$$

y

$$\forall y \in Y \qquad f^y \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}).$$

Demostración. Demostremos solamente la afirmación sobre f_x. Dado un conjunto abierto V en $\mathbb{C}$, pongamos

$$Q = f^{-1}[V] = \{(x,y) \in X\times Y\colon\ f(x,y) \in V\}.$$

Entonces $Q \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$. Para cada x en X, $Q_x \in \mathcal{G}$. Por otro lado,

$$Q_x = \{y \in Y\colon\ f(x,y) \in V\} = \{y \in Y\colon\ f_x(y) \in V\} = f_x^{-1}[V].$$

Hemos mostrado que $f_x^{-1}[V] \in \mathcal{G}$ para cada x en X. □