# Medibilidad sobre productos cartesianos

**Objetivos.** Estudiar el concepto de la medibilidad de funciones definidas en productos de espacios de medida.

**Requisitos.** $\sigma$-álgebras, funciones medibles, clases monótonas.

**1. Definición ("rectángulos").** Sean $X, Y$ conjuntos. Entonces cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \subset X$ y $B \subset Y$, se llama *rectángulo* en $X \times Y$.

**2. Definición ("rectángulos medibles").** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces cualquier subconjunto de $X \times Y$ de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, se llama *rectángulo medible* en $X \times Y$.

Previamente (en Análisis Matemático II) demostramos el siguiente resultado. No vamos a repasar su demostración.

**3. Proposición (los rectángulos medibles forman un semianillo).** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Entonces la colección

$$\{A \times B: \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$$

es un semianillo.

**4. Definición (producto de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras).** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con $\sigma$-álgebras. Se denota por $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ la $\sigma$-álgebra generada por todos los *rectángulos medibles*, es decir, por todos los conjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$.

**5. Definición (clase monótona de conjuntos, repaso).** Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de conjuntos. Se dice que $\mathcal{F}$ es una *clase monótona* si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones de sucesiones crecientes de conjuntos y bajo intersecciones de sucesiones decrecientes de conjuntos.

**6. Proposición (descripción de la $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra generada en términos de clases monótonas, repaso).** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona más pequeña que contiene $\mathcal{A}$. Entonces $\mathfrak{M}$ es la $\sigma$-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

**7. Definición (conjuntos elementales).** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con $\sigma$-álgebras. Los *conjuntos elementales* se definen como uniones disjuntas finitas de rectángulos medibles en $X \times Y$.

**8. Proposición.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios con $\sigma$-álgebras. Entonces el conjunto $\mathcal{E}$ de los conjuntos elementales en $X \times Y$ es un álgebra de conjuntos, es decir, $\mathcal{E}$ contiene a $\varnothing \times \varnothing$ y es cerrado bajo los complementos, diferencias, uniones finitas e intersecciones finitas.

**9. Teorema.** $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a todos los conjuntos elementales.

## Medibilidad de las secciones de conjuntos medibles

**10. Notación (secciones de conjuntos).** Sea $E \subset X \times Y$. Entonces para todo $x \in X$ se pone

$$E_x = \{y \in Y\colon \quad (x,y) \in E\},$$

y para todo $y \in Y$ se pone

$$E^y = \{x \in X\colon \quad (x,y) \in E\}.$$

**11. Ejercicio: descripción de las secciones en términos de proyecciones.** Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$, $\pi_2\colon X \times Y \to Y$ mediante las reglas

$$\pi_1(x,y) = x, \qquad \pi_2(x,y) = y.$$

Describir $E_x$ y $E^y$ en términos de $\pi_1$ y $\pi_2$.

**12. Teorema (sobre la medibilidad de las secciones de un conjunto medible).** Sean $(X,\mathcal{F})$ y $(Y,\mathcal{G})$ conjuntos con $\sigma$-álgebras y sea $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad E_x \in \mathcal{G}$$

y

$$\forall y \in Y \qquad E^y \in \mathcal{F}.$$

*Demostración.* Demostremos solamente la afirmación sobre $E_x$. Sea

$$\Omega \coloneqq \{C \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}\colon \quad \forall x \in X \quad C_x \in \mathcal{G}\}.$$

Si $C = A \times B$ con $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, entonces

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A, \\ \varnothing, & \text{si } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

así que $C_x \in \mathcal{G}$ para cada $x$ en $X$. Hemos mostrado que $G \subset \Omega$. Probemos que $\Omega$ es una $\sigma$-álgebra:

- $X \times Y \in \Omega$, porque $\forall x \in X$ se tiene que $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{G}$.
- Si $C \in \Omega$, entonces para cada $x$ en $X$ tenemos que

  $$(C^c)_x = \{y \in Y\colon\ (x,y) \notin C\} = (C_x)^c \in \mathcal{G},$$

  así que $C^c \in \Omega$.

- Si $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ y $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$, entonces para cada $x$ en $X$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_x &= \left\{ y \in Y\colon\ (x,y) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \right\} \\ &= \{y \in Y\colon\ \exists k \in \mathbb{N} \quad (x,y) \in C_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (C_k)_x \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

  así que $D \in \Omega$.

Hemos mostrado que $\Omega$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a todos los rectángulos medibles. Por lo tanto, $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subset \Omega$, así que para cada $E$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tenemos $E \in \Omega$, esto es, $E_x \in \mathcal{G}$ para cada $x$ en $X$. $\square$

## Medibilidad de secciones de funciones

**13. Notación (secciones de funciones).** Sea $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Para todo $x$ en $X$ definamos $f_x\colon Y \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall y \in Y \qquad f_x(y) = f(x,y).$$

Para todo $y \in Y$ definamos $f^y\colon X \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\forall x \in X \qquad f^y(x) = f(x,y).$$

**14. Teorema.** Sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\forall x \in X \qquad f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, \mathbb{C})$$

y

$$\forall y \in Y \qquad f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}).$$

*Demostración.* Demostremos solamente la afirmación sobre $f_x$. Dado un conjunto abierto $V$ en $\mathbb{C}$, pongamos

$$Q = f^{-1}[V] = \{(x,y) \in X \times Y\colon\ f(x,y) \in V\}.$$

Entonces $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Para cada $x$ en $X$, $Q_x \in \mathcal{G}$. Por otro lado,

$$Q_x = \{y \in Y\colon\ f(x,y) \in V\} = \{y \in Y\colon\ f_x(y) \in V\} = f_x^{-1}[V].$$

Hemos mostrado que $f_x^{-1}[V] \in \mathcal{G}$ para cada $x$ en $X$. $\square$