Esperanza y varianza en términos de la proyección ortogonal (un tema de análisis matemático)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

21 de diciembre de 2025

Plan

Objetivos

- Dada una variable aleatoria X, expresar $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ en términos de una proyección ortogonal.

Prerrequisitos

- El espacio $L^2(\Omega)$, donde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida.
- El producto interno.
- La proyección ortogonal sobre un espacio unidimensional.

El espacio de probabilidad y variables aleatorias cuadrado integrables

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de medida de probabilidad, es decir, un espacio de medida tal que

$$P(\Omega) = 1.$$

Notación: $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P).$

$L^2(\Omega)$ se considera con el siguiente producto interno y la siguiente norma:

$$\langle X, Y \rangle := \int_\Omega X\,\overline{Y}\,\mathrm{d}P,$$

$$\|X\| = \|X\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\int_\Omega |X|^2\,\mathrm{d}P}.$$

La función constante 1

Denotamos por $\mathbb{1}$ la función constante 1:

$$\mathbb{1}(\omega) := 1 \qquad (\omega \in \Omega).$$

Algunas propiedades simples:

- $X\mathbb{1} = X$ para cada función $X\colon \Omega \to \mathbb{C}$;
- $\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}$;
- $\overline{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$;
- $\|\mathbb{1}\| = 1$.

La media y varianza de una variable aleatoria

Suponemos que $X \in L^2(\Omega)$.

Por la desigualdad de Hölder,

$$\|X\|_1 = \int_\Omega |X| \, \mathrm{d}P = \int_\Omega |X| \, \mathbb{1} \, \mathrm{d}P \le \|X\|_2 \, \|\mathbb{1}\|_2 = \|X\|_2.$$

En particular, $X \in L^1(\Omega)$.

$$\boxed{\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X \, \mathrm{d}P,}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}(|X - \mathrm{E}(X)\mathbb{1}|^2) = \int_\Omega |X - \mathrm{E}(X)\mathbb{1}|^2 \, \mathrm{d}P.}$$

La media y varianza en términos del producto interno

$$\mathsf{E}(X) := \int_\Omega X \,\mathrm{d}P, \qquad \mathsf{Var}(X) := \mathsf{E}(|X - \mathsf{E}(X)\mathbb{1}|^2).$$

Observamos que

$$\mathsf{E}(X) = \langle X, \mathbb{1} \rangle,$$

$$\mathsf{Var}(X) = \|X - \mathsf{E}(X)\mathbb{1}\|^2.$$

Vamos a explicar el sentido geométrico de estos números.

El subespacio U generado por $\mathbb{1}$

$U :=$ el conjunto de los múltiplos de $\mathbb{1}$:

$$U := \{Y \in L^2(X) \colon\ \exists \alpha \in \mathbb{C} \quad Y = \alpha \mathbb{1}\}.$$

En otras palabras, U es el subespacio de $L^2(\Omega)$ generado por la función $\mathbb{1}$:

$$U = \operatorname{lin}(\mathbb{1}) = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Como U es un espacio unidimensional, U es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.

En particular, U es cerrado.

El subespacio W: las variables aleatorias cuya media es 0

Sea W el conjunto de las variables aleatorias cuadrado integrables cuya media es 0:

$$W := \{Z \in L^2(\Omega) \colon \; \mathrm{E}(Z) = 0\}.$$

Como $\mathrm{E}(Z) = \langle Z, \mathbb{1} \rangle$, podemos describir W como el complemento ortogonal de $\{\mathbb{1}\}$:

$$W = \{Z \in L^2(\Omega) \colon \quad \langle Z, \mathbb{1} \rangle = 0\} = \{\mathbb{1}\}^\perp.$$

Como $U = \mathrm{lin}(\mathbb{1})$, por las propiedades básicas del producto interno, W es el complemento ortogonal de U:

$$W = U^\perp.$$

Descomposición $L^2(\Omega) = U \oplus W$

Tenemos un espacio unidimensional U de $L^2(\Omega)$ y su complemento ortogonal

$$W = U^\perp.$$

Por la teoría elemental de la proyección ortogonal,

$$L^2(\Omega) = U \oplus W.$$

Esto significa que cada elemento X de $L^2(\Omega)$ se descompone de manera única en la forma

$$X = Y + Z, \qquad \text{donde} \qquad Y \in U, \qquad Z \in W.$$

Recordemos como calcular estos sumandos Y y Z.

La descomposición ortogonal en forma explícita

Dada X en $L^2(\Omega)$, definimos

$$Y := \langle X, \mathbb{1} \rangle \mathbb{1}, \qquad Z := X - Y, \qquad \text{esto es,}$$

$$Y = \mathrm{E}(X)\mathbb{1}, \qquad Z = X - \mathrm{E}(X)\mathbb{1}.$$

Por la propiedad lineal del producto interno respecto al primer argumento,

$$\langle Z, \mathbb{1} \rangle = \langle X - \mathrm{E}(X)\mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle X, \mathbb{1} \rangle - \langle X, \mathbb{1} \rangle \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = 0.$$

Hemos verificado que $Z \perp \mathbb{1}$.

Por lo tanto,

$$X = Y + Z, \qquad Y \in U, \qquad Z \in W.$$

La descomposición ortogonal en forma explícita

Dada X en $L^2(\Omega)$, tenemos que

$$X = \underbrace{Y}_{\substack{\cap \\ U}} + \underbrace{Z}_{\substack{\cap \\ W}},$$

donde

$$Y = \langle X, \mathbb{1} \rangle \mathbb{1} = \mathsf{E}(X)\mathbb{1}, \qquad Z = X - \mathsf{E}(X)\mathbb{1}.$$

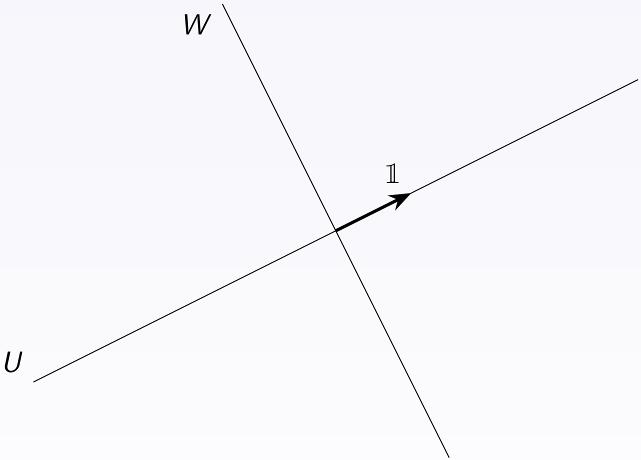
Y es la proyección ortogonal de X sobre U,

Z es la proyección ortogonal de X sobre W.

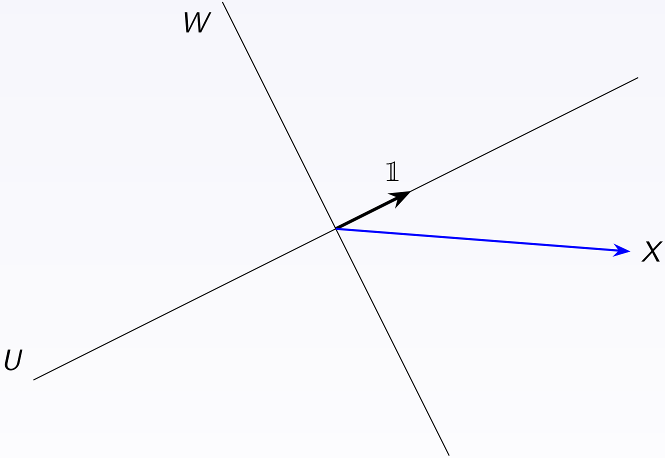
En otras palabras, entre todos los múltiplos de $\mathbb{1}$, es Y es el más cercano a X,

y entre todas variables aleatorias con medida 0, Z es la más cercana a X.

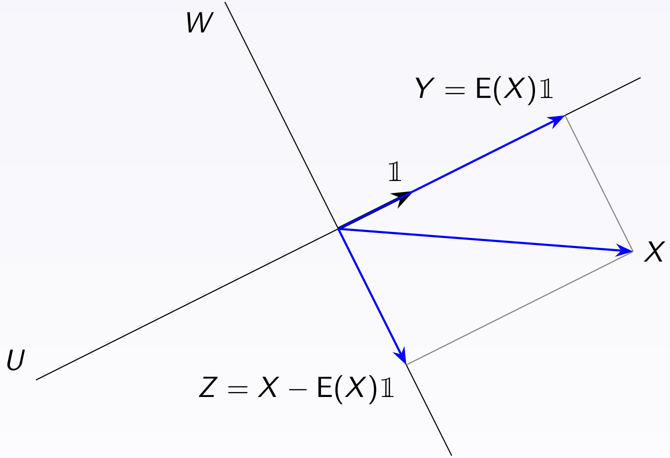
Descomposición ortogonal $L^2(\Omega) = U \oplus W$



Descomposición ortogonal $L^2(\Omega) = U \oplus W$



Descomposición ortogonal $L^2(\Omega) = U \oplus W$



Conclusiones finales

Dada X en $L^2(\Omega)$, X se descompone de manera única en la forma

$$X = Y + Z,$$

donde Y es un múltiplo de $\mathbb{1}$ y Z tiene media 0.

En forma explícita,

$$X = \underbrace{\mathrm{E}(X)\mathbb{1}}_{Y} + \underbrace{X - \mathrm{E}(X)\mathbb{1}}_{Z}.$$

El vector Y es la proyección ortogonal de X sobre el subespacio U de múltiplos de $\mathbb{1}$.

$\mathrm{E}(X)$ es el coeficiente de esta proyección ortogonal;
$\mathrm{Var}(X)$ es el cuadrado de la norma del complemento ortogonal.