Espacios ℓ^p

(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko,

`http://www.egormaximenko.com`

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

11 de febrero de 2022

Objetivos y prerrequisitos

Definir los espacios ℓ^p. Demostrar la propiedad subaditiva de la norma.

En esta clase no estudiaremos la completez ni subconjuntos densos.

Prerrequisitos:

- operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
- el criterio de convexidad de funciones reales en términos de la derivada,
- el supremo de una sucesión.

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := \left[a_k + b_k\right]_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_k\right]_{k\in\mathbb{N}}.$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := \left[a_k + b_k\right]_{k \in \mathbb{N}}, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_k\right]_{k \in \mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $a + b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(a+b)_k = a_k + b_k, \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := \left[a_k + b_k\right]_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_k\right]_{k\in\mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $a + b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(a+b)_k = a_k + b_k, \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio. Recordar la demostración que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial.

Espacio vectorial $\mathbb{C}^\mathbb{N}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(\lambda(a+b))_k &= \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k + b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k \\ &= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.\end{aligned}$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(\lambda(a+b))_k &= \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k+b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k\\ &= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.\end{aligned}$$

El vector cero en el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante cero:

$$0_{\mathbb{N}} := [0]_{k\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots).$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^\mathbb{N}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(\lambda(a+b))_k &= \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k+b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k \\ &= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.\end{aligned}$$

El vector cero en el espacio vectorial $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ es la sucesión constante cero:

$$0_\mathbb{N} := [0]_{k\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots).$$

Mostremos que $a + 0_\mathbb{N} = a$:

$$(a+0_\mathbb{N})_k = a_k + (0_\mathbb{N})_k = a_k + 0 = a_k.$$

Funcional N_p

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_p(a) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Funcional N_p

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $N_p \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_p(a) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Notemos que N_p no es norma porque puede tomar el valor $+\infty$.

Algunos autores usan el término "norma extendida", cuando se admite el valor $+\infty$.

Propiedad absolutamente homogénea de N_p

Proposición

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$N_p(\lambda a) = |\lambda| \, N_p(a).$$

Propiedad absolutamente homogénea de N_p

Proposición

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$N_p(\lambda a) = |\lambda|\, N_p(a).$$

Demostración.

$$N_p^p(\lambda a) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda a_k|^p = |\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = |\lambda|^p\, N_p^p(a).$$

$\square$

Propiedad estrictamente positiva

Proposición

$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$N_p(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

Propiedad estrictamente positiva

Proposición

$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$N_p(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

Demostración. Si $a \neq 0_{\mathbb{N}}$, entonces elegimos m en $\mathbb{N}$ con $a_m \neq 0$.

Luego

$$N_p^p(a) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \geq |a_m|^p > 0.$$

$\square$

Propiedad estrictamente positiva

Proposición

$\forall a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$N_p(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

Demostración. Si $a \neq 0_{\mathbb{N}}$, entonces elegimos m en $\mathbb{N}$ con $a_m \neq 0$.

Luego

$$N_p^p(a) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \geq |a_m|^p > 0.$$

□

Nuestro objetivo es demostrar que N_p es subaditiva.

Convexidad de la función exponencial real

Consideramos $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Convexidad de la función exponencial real

Consideramos $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Se puede ver que $\exp'_{\mathbb{R}} = \exp_{\mathbb{R}}$.

Convexidad de la función exponencial real

Consideramos $\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Se puede ver que $\exp_{\mathbb{R}}' = \exp_{\mathbb{R}}$.

Esto implica que $\exp_{\mathbb{R}}''(x) = \exp(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

Convexidad de la función exponencial real

Consideramos $\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

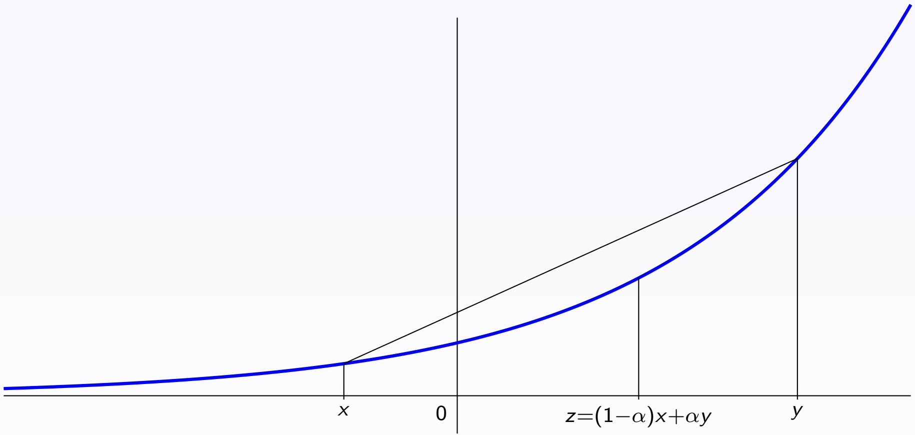
Se puede ver que $\exp_{\mathbb{R}}' = \exp_{\mathbb{R}}$.

Esto implica que $\exp_{\mathbb{R}}''(x) = \exp(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in [0,1] \qquad \exp_{\mathbb{R}}((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha) \exp_{\mathbb{R}}(x) + \alpha \exp_{\mathbb{R}}(y).$$

Convexidad de la función exponencial real



Desigualdad de Young (repaso)

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdad de Young (repaso)

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ejercicio. Demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función $\exp_{\mathbb{R}}$.

El caso de igualdad en la desigualdad de Young

Ejercicio. Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Supongamos que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostrar que

$$a^p = b^q.$$

Ejercicio. Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}$ es estríctamente convexa y aplicar esta propiedad.

Desigualdad de Hölder para sucesiones

Proposición

Sean $u, v \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$: $\quad u = 0_{\mathbb{N}}$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$: $\quad u = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_q(v) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$: $\quad u = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_q(v) = 0$: $\quad v = 0_{\mathbb{N}}$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$: $\quad u = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_q(v) = 0$: $\quad v = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_p(u) > 0$, $N_q(v) > 0$, $N_p(u) = +\infty$ o $N_q(v) = +\infty$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \leq N_p(u) N_q(v).$$

Caso $N_p(u) = 0$: $\quad u = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_q(v) = 0$: $\quad v = 0_{\mathbb{N}}$.

Caso $N_p(u) > 0$, $N_q(v) > 0$, $N_p(u) = +\infty$ o $N_q(v) = +\infty$: $\quad$ el lado derecho es $+\infty$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

aplicamos la desigualdad de Young, luego sumamos:

$$a_k b_k \le \qquad \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

aplicamos la desigualdad de Young, luego sumamos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} \right)$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

aplicamos la desigualdad de Young, luego sumamos:

$$\frac{1}{UV}\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}\right)$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

aplicamos la desigualdad de Young, luego sumamos:

$$\frac{1}{UV}\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}\right) = \frac{1}{pU^p}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^p + \frac{1}{qV^q}\sum_{k=1}^{\infty} v_k^q$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Demostremos la desigualdad $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \le \underbrace{N_p(u)}_{U}\,\underbrace{N_q(v)}_{V}$

en el caso principal, cuando $0 < U < +\infty$, $0 < V < +\infty$.

Pongamos

$$a_k := \frac{u_k}{U}, \qquad b_k := \frac{v_k}{V},$$

aplicamos la desigualdad de Young, luego sumamos:

$$\frac{1}{UV}\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}\right) = \frac{1}{pU^p}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^p + \frac{1}{qV^q}\sum_{k=1}^{\infty} v_k^q = 1.$$

Desigualdad de Hölder para sucesiones complejas

Proposición

Sean $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \right| \leq N_p(u) N_q(v).$$

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder, el caso de funciones positivas

Ejercicio. Sean $u, v \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Determinar, cuando

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = N_p(u) N_q(v).$$

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder, el caso de funciones positivas

Ejercicio. Sean $u, v \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Determinar, cuando

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = N_p(u) N_q(v).$$

Sugerencia. En el caso principal, cuando $0 < N_p(u) < +\infty$, $0 < N_q(v) < +\infty$,

$$1 - \frac{1}{UV} \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \frac{1}{pU^p} \sum_{k=1}^{\infty} u_k^p + \frac{1}{qV^q} \sum_{k=1}^{\infty} v_k^q - \frac{1}{UV} \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} - a_k b_k \right).$$

Aplicar el criterio de igualdad en la desigualdad de Young.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder, el caso de funciones complejas

Ejercicio. Sean $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Determinar cuando

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \right| = N_p(u) N_q(v).$$

La convexidad de la función potencia, $p \geq 1$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f_p(x) := x^p.$$

La convexidad de la función potencia, $p \geq 1$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f_p(x) := x^p.$$

Entonces

$$f_p'(x) = px^{p-1}, \qquad f_p''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \qquad (x > 0).$$

La convexidad de la función potencia, $p \ge 1$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Consideramos $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f_p(x) := x^p.$$

Entonces

$$f_p'(x) = px^{p-1}, \qquad f_p''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \qquad (x > 0).$$

Por lo tanto, la función f_p es convexa:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \forall \alpha \in [0,1] \qquad f_p((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha) f_p(x) + \alpha f_p(y).$$

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $x, y \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $x, y \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

Ejercicio. Demostrar esta propiedad usando la convexidad de la función

$$f_p(x) := x^p.$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$N_p(a+b) \leq N_p(a) + N_p(b).$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a + b) \leq N_p(a) + N_p(b).$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a+b) \le N_p(a) + N_p(b).$$

Caso $N_p(a) = +\infty$ o $N_p(b) = +\infty$:

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a+b) \leq N_p(a) + N_p(b).$$

Caso $N_p(a) = +\infty$ o $N_p(b) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a+b) \le N_p(a) + N_p(b).$$

Caso $N_p(a) = +\infty$ o $N_p(b) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(a+b) = 0$:

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a+b) \leq N_p(a) + N_p(b).$$

Caso $N_p(a) = +\infty$ o $N_p(b) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(a+b) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, casos triviales

$$N_p(a+b) \le N_p(a) + N_p(b).$$

Caso $N_p(a) = +\infty$ o $N_p(b) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(a+b) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Caso $p = 1$: para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$|a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k|.$$

Al sumar sobre k, obtenemos el resultado.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, una cota inprecisa para el lado izquierdo

Sean $a, b \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k|^p \le (|a_k| + |b_k|)^p \le 2^{p-1}(|a_k|^p + |b_k|^p).$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, una cota inprecisa para el lado izquierdo

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k|^p \leq (|a_k| + |b_k|)^p \leq 2^{p-1}(|a_k|^p + |b_k|^p).$$

Sumamos sobre k:

$$N_p^p(a+b) \leq 2^{p-1}(N_p^p(a) + N_p^p(b)).$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, una cota inprecisa para el lado izquierdo

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k|^p \le (|a_k| + |b_k|)^p \le 2^{p-1}(|a_k|^p + |b_k|^p).$$

Sumamos sobre k:

$$N_p^p(a+b) \le 2^{p-1}(N_p^p(a) + N_p^p(b)).$$

Si $N_p(a) < +\infty$ y $N_p(b) < +\infty$, entonces $N_p(a+b) < +\infty$.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$N_p^p(a+b) =$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$N_p^p(a+b) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p =$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$N_p^p(a+b) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1}$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} N_p^p(a+b) &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \end{aligned}$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(a+b) &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \\
\text{(Hölder)} \quad &\le
\end{aligned}
$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(a+b) &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \\
\text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(a)N_p(a+b)^{p/q} + N_p(b)N_p(a+b)^{p/q}.
\end{aligned}
$$

Desigualdad de Minkowski para sucesiones, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(a) < +\infty$, $N_p(b) < +\infty$, $0 < N_p(a+b) < +\infty$.

Definimos $q = \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} N_p^p(a+b) &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \\ \text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(a) N_p(a+b)^{p/q} + N_p(b) N_p(a+b)^{p/q}. \end{aligned}$$

Dividimos entre $N_p^{p/q}(a+b)$ y usamos el hecho que $p - \frac{p}{q} = 1$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$ y sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Determinar cuando

$$N_p(a + b) = N_p(a) + N_p(b).$$

Espacios de sucesiones p-sumables

Sea $p \in [1, +\infty)$.

$$\ell^p := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_p(a) < +\infty \right\}.$$

Espacios de sucesiones p-sumables

Sea $p \in [1, +\infty)$.

$$\ell^p := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_p(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Espacios de sucesiones p-sumables

Sea $p \in [1, +\infty)$.

$$\ell^p := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_p(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La norma $\|\cdot\|_p$ en ℓ^p se define como la restricción de N_p:

$$\|a\|_p := N_p(a) \qquad (a \in \ell^p).$$

Espacios de sucesiones p-sumables

Sea $p \in [1, +\infty)$.

$$\ell^p := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_p(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La norma $\|\cdot\|_p$ en ℓ^p se define como la restricción de N_p:

$$\|a\|_p := N_p(a) \qquad (a \in \ell^p).$$

Este espacio también se denota por $\ell^p(\mathbb{N})$.

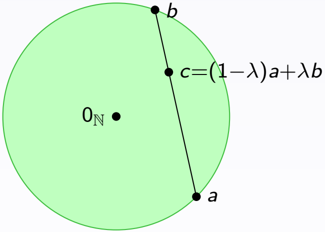
De manera similar, se definen $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^p(X)$, donde X es un conjunto arbitrario.

La bola unitaria cerrada en ℓ^p, $1 < p < +\infty$, es estrictamente convexa

Ejercicio. Sea $p \in (1, +\infty)$. Supongamos que $a, b \in \ell^p$,

$$a \neq b, \quad \|a\|_p \le 1, \quad \|b\|_p \le 1, \quad \lambda \in (0,1).$$

Demostrar que $\|(1-\lambda)a + \lambda b\|_p < 1$.



La bola unitaria cerrada en ℓ^1 no es estrictamente convexa

Ejercicio. Construir $a, b \in \ell^1$ y $\lambda \in (0,1)$ tales que

$$a \neq b, \qquad \|a\|_1 = 1, \qquad \|b\|_1 = 1, \qquad \|(1-\lambda)a + \lambda b\|_1 = 1.$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 < p_2$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_{p_2}(a) \leq N_{p_1}(a).$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 < p_2$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_{p_2}(a) \leq N_{p_1}(a).$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 \leq p_2$. Demostrar que

$$\ell^{p_1} \subseteq \ell^{p_2}.$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 < p_2$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^\mathbb{N}$,

$$N_{p_2}(a) \le N_{p_1}(a).$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 \le p_2$. Demostrar que

$$\ell^{p_1} \subseteq \ell^{p_2}.$$

Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty)$, $p_1 < p_2$. Demostrar que

$$\ell^{p_1} \subsetneq \ell^{p_2}.$$

Sugerencia: $a_k = k^{-???}$.

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty\colon \mathbb{C}^\mathbb{N} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. Entonces

$$N_\infty(a + b) \leq N_\infty(a) + N_\infty(b).$$

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$N_\infty(a + b) \leq N_\infty(a) + N_\infty(b).$$

Idea: Para cada k en $\mathbb{N}$, $\quad |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq N_\infty(a) + N_\infty(b).$ $\square$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda|\, N_\infty(a)$$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda|\, N_\infty(a)$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

El espacio de sucesiones acotadas

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

El espacio de sucesiones acotadas

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

El espacio de sucesiones acotadas

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La norma en ℓ^∞ se define como la restricción de N_∞:

$$\|a\|_\infty := N_\infty(a) \qquad (a \in \ell^\infty).$$

El espacio de sucesiones acotadas

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Las operaciones lineales en ℓ^p se heredan de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$.

La norma en ℓ^∞ se define como la restricción de N_∞:

$$\|a\|_\infty := N_\infty(a) \qquad (a \in \ell^\infty).$$

Este espacio también se denota por $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

De manera similar, se define $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

La bola unitaria cerrada en ℓ^∞ no es estrictamente convexa

Ejercicio. Construir $a, b \in \ell^\infty$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que

$$a \ne b, \qquad \|a\|_\infty = 1, \qquad \|b\|_\infty = 1, \qquad \|(1-\lambda)a + \lambda b\|_\infty = 1.$$

Los espacios ℓ^p están contenidos en ℓ^∞

Ejercicio. Desigualdad de Hölder para $p = 1$, $q = +\infty$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq N_1(a) N_\infty(b).$$

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_\infty(a) \leq N_p(a).$$

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_\infty(a) \leq N_p(a).$$

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que $\ell^p \subseteq \ell^\infty$.

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_\infty(a) \leq N_p(a).$$

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que $\ell^p \subseteq \ell^\infty$.

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$.

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que para cada a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$N_\infty(a) \leq N_p(a).$$

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que $\ell^p \subseteq \ell^\infty$.

Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar que $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$.

En particular, se recomienda saber demostrar las siguientes contenciones:

$$\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^\infty.$$

Acotación de las componentes

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell^\infty$, $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|a_m| \leq \|a\|_p.$$

Demostración: ejercicio simple.

Ejercicio.

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p, y sea $m \in \mathbb{N}$.

Demostrar que la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Ejercicio.
Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p, y sea $m \in \mathbb{N}$.
Demostrar que la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Ejercicio.
Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ^p, sea $b \in \ell^p$, y sea $m \in \mathbb{N}$.
Supongamos que

$$\lim_{k\to\infty} \|a^{(k)} - b\|_p = 0.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)} - b_m| = 0.$$

La convergencia por componentes no implica la convergencia en ℓ^p

Ejercicio. Construir una sucesión $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ en ℓ^p tal que

- para cada m en $\mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} = 0$;
- para cada k en $\mathbb{N}$, $\|a^{(k)}\|_p \geq 1$.