Espacios localmente compactos

Objetivos. Repasar algunos conceptos y propiedades relacionados con espacios compactos y localmente compactos.

Requisitos. Espacios topológicos, conjuntos compactos.

1. Repasar los conceptos básicos de la topología general:

- espacio topológico;
- conjuntos cerrados y abiertos;
- cerradura (clausura) de un conjunto;
- vecindad (abierta) de un punto;
- función continua.

2. Repasar la definición de espacio de Hausdorff.

3. Repasar la definición de conjunto compacto.

4. Definición (espacio localmente compacto). Un espacio topológico X se llama *localmente compacto* si para todo punto $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que su clausura $\overline{U}$ es un conjunto compacto.

5. Teorema de Heine-Borel. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

6. Corolario. $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto.

7. Teorema (subconjunto cerrado de un compacto es compacto). Sea X un espacio topológico, sea $K \subseteq X$ un subconjunto compacto y sea $F \subseteq K$ un conjunto cerrado. Entonces F es compacto.

8. Teorema (separación de un punto y un compacto). Sea X un espacio de Hausdorff, sea $K \subseteq X$ un compacto y sea $p \in X \setminus K$. Entonces existen conjuntos abiertos U y W tales que $p \in U$, $K \subseteq W$, y $U \cap W = \varnothing$.

9. Corolario. Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

10. Corolario. Si X es un espacio de Hausdorff, F es cerrado y K es compacto, entonces $F \cap K$ es compacto.

11. Proposición. Sea X un espacio de Hausdorff y sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de subconjuntos compactos tal que $\bigcap\limits_{\alpha\in A} K_\alpha = \varnothing$. Entonces existe una subfamilia finita $\{K_\alpha\}_{\alpha\in B}$, $B \subseteq A$, $|B| < +\infty$, tal que $\bigcap\limits_{\alpha\in B} K_\alpha = \varnothing$.

12. Proposición. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, sea U un conjunto abierto en X y sea K un compacto en X, $K \subseteq U$. Entonces existe un conjunto abierto V tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

13. Criterio de función real continua. Sea X un espacio topológico y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces f es continua si y sólo si para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el siguiente conjunto es abierto:

$$\big\{x \in X\colon\ \alpha < f(x) < \beta\big\}.$$

14. Definición (función semicontinua por abajo). Sea X un espacio topológico. Una función $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama *semicontinua por abajo* si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el siguiente conjunto es abierto:

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) > \alpha\big\}.$$

15. Definición (función semicontinua por arriba). Sea X un espacio topológico. Una función $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ se llama *semicontinua por arriba* si para todo $\beta \in \mathbb{R}$ el siguiente conjunto es abierto:

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) < \beta\big\}.$$

16. Observación. Una función $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ es continua si y sólo si es semicontinua por abajo y semicontinua por arriba.

17. Ejercicio. Demuestre que la función característica de un conjunto abierto es semicontinua por abajo.

18. Ejercicio. Demuestre que la función característica de un conjunto cerrado es semicontinua por arriba.

19. Proposición. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, donde $f_\alpha\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, una familia de funciones semicontinuas por abajo. Entonces la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x) = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x),$$

también es semicontinua por abajo.

20. Proposición. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, donde $f_\alpha\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, una familia de funciones semicontinuas por arriba. Entonces la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x) = \inf_{\alpha\in A} f_\alpha(x),$$

también es semicontinua por arriba.