Operaciones lineales con subconjuntos de espacios vectoriales

Objetivos. Dado un espacio vectorial complejo V, definir operaciones algebraicas entre los subconjuntos de $\mathbb{C}$ y V. Estudiar las propiedades básicas de estas operaciones.

Prerrequisitos. Espacios vectoriales, imágenes de funciones.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

La suma de dos subconjuntos de un espacio vectorial

1 Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $P, Q \subseteq V$. Los conjuntos $P+Q$ y $P-Q$ se definen mediante las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} P+Q &\coloneqq \big\{w \in V\colon \quad \exists u \in P \quad \exists v \in Q \quad w = u + v\big\}, \\ P-Q &\coloneqq \big\{w \in V\colon \quad \exists u \in P \quad \exists v \in Q \quad w = u - v\big\}. \end{aligned}$$

En la notación breve, se puede escribir

$$P+Q = \big\{u+v\colon \quad u \in P, \quad v \in Q\big\}, \qquad P-Q = \big\{u-v\colon \quad u \in P, \quad v \in Q\big\}.$$

2 Ejercicio. Sean $P, Q \subseteq V$. Mostrar que $P+Q = Q+P$.

3 Ejercicio. Sea $P \subseteq V$. Mostrar que $P + \{0_V\} = P$.

4 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo no nulo. Encontrar $P \subseteq V$ tal que $P - P \neq \{0_V\}$.

5 Ejercicio. Sean $P, Q, R \subseteq V$. Mostrar que $(P+Q)+R = P+(Q+R)$.

La suma de un conjunto y un punto de un espacio vectorial

6 Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $P \subseteq V$, $v \in V$. Los conjuntos $P + v$ y $P - v$ se definen mediante las siguientes reglas:

$$P+v := \big\{w \in V\colon \quad \exists u \in P \quad w = u+v\big\}, \qquad P-v := \big\{w \in V\colon \quad \exists u \in P \quad w = u-v\big\}.$$

7 Ejercicio. Sean $P \subseteq V$ y $v \in V$. Mostrar que

$$P + v = \big\{w \in V\colon \quad w - v \in P\big\}, \qquad P - v = \big\{w \in V\colon \quad w + v \in P\big\}.$$

Notemos que en estas fórmulas ya no aparece el cuantificador $\exists$.

8 Ejercicio. Sean $P \subseteq V$ y $v \in V$. Mostrar que $P + v = P + \{v\}$ y $P - v = P - \{v\}$.

9 Ejercicio. Dados $v \in V$, $P \subseteq V$, definir $v + P$ y $v - P$. Mostrar que $v + P = P + v$.

10 Ejercicio. Sean $a, b \in V$ y $P \subseteq V$. mostrar que $a + (b + V) = (a + b) + V$.

El producto de un conjunto de escalares por un conjunto de vectores

11 Definición. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ y $P \subseteq V$. El conjunto ΛP se define mediante la regla

$$\Lambda P := \big\{w \in V\colon \quad \exists \lambda \in \Lambda \quad \exists u \in V \quad w = \lambda u\big\}.$$

12 Ejercicio. Sean $\Lambda, \Phi \subseteq \mathbb{C}$ y $P \subseteq V$. Mostrar que $(\Lambda\Phi)P = \Lambda(\Phi P)$.

13 Ejercicio. Sea $P \subseteq V$. Mostrar que $\{1\}P = P$.

El producto de un conjunto de escalares por un vector

14 Definición. Sean $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ y $v \subseteq V$. El conjunto Λv se define mediante la regla

$$\Lambda v := \big\{w \in V\colon \quad \exists \lambda \in \Lambda \quad w = \lambda u\big\}.$$

15 Ejercicio. Mostrar que $\Lambda v = \Lambda\{v\}$.

16 Ejercicio. Sea $v \in V$. Mostrar que $\mathbb{C}v$ es el subespacio vectorial generado por v.

El producto de un escalar por un conjunto de vectores

17 Definición. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $P \subseteq V$. El conjunto λP se define mediante la regla

$$\lambda P := \big\{ w \in V : \quad \exists u \in V \quad w = \lambda u \big\}.$$

18 Ejercicio. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $P \subseteq V$. Mostrar que $\lambda P = \{\lambda\} P$.

19 Ejercicio. Sean $\varkappa, \lambda \in \mathbb{C}$ y $P \subseteq V$. Mostrar que $(\varkappa\lambda)P = \varkappa(\lambda P)$.

20 Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $P = \varnothing$. Mostrar que $\lambda P = \varnothing$.

21 Ejercicio. Sea $P \subseteq V$, $P \neq \varnothing$. Mostrar que $0P = \{0_V\}$.

22 Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $P \subseteq V$. Mostrar que

$$\lambda P = \big\{ w \in V : \quad \lambda^{-1} w \in P \big\}.$$

En el lado derecho de esta fórmula evitamos el cuantificador $\exists$.

Propiedades distributivas

23 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $P, Q \subseteq V$. Entonces*

$$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q.$$

Demostración. $\subseteq$. Sea $w \in \lambda(P + Q)$. Entonces existen u en P y v en Q tales que $w = \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$. Por lo tanto, $w \in \lambda(P + Q)$.

$\supseteq$. Sea $w \in \lambda P + \lambda Q$. Entonces existen a en λP y b en λQ tales que $w = a + b$. Luego existen u en P y v en Q tales que $a = \lambda u$, $b = \lambda v$. Por lo tanto,

$$w = a + b = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v) \in \lambda(P + Q). \qquad \square$$

24 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\Lambda, \Phi \subseteq \mathbb{C}$, $v \in V$. Entonces*

$$(\Lambda + \Phi)v = \Lambda v + \Phi v.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

25 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo no nulo. Encontrar $P \subseteq V$ tal que

$$P + P \neq 2P,$$

esto es,

$$(1+1)P \neq 1\,P + 1\,P.$$

26 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo no nulo. Encontrar $P \subseteq V$ tal que

$$(1-1)P \neq 1\,P - 1\,P.$$

27 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial complejo no nulo y sea $a \in V \setminus \{0\}$. Encontrar $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$\Lambda(a+a) \neq \Lambda a + \Lambda a.$$