Operadores lineales isométricos entre los espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de julio de 2022

En este tema suponemos que H_1, H_2 son espacios de Hilbert complejos.

En este tema suponemos que H_1, H_2 son espacios de Hilbert complejos.

Objetivo:

- estudiar varias descripciones equivalentes de las isometrías lineales $H_1 \to H_2$.

En este tema suponemos que H_1, H_2 son espacios de Hilbert complejos.

Objetivo:

- estudiar varias descripciones equivalentes de las isometrías lineales $H_1 \to H_2$.

Prerrequisitos:

- la correspondencia entre las formas sesquilineales acotadas y los operadores lineales acotados;
- el operador adjunto en espacios de Hilbert;
- la identidad de polarización para el producto interno.

Plan

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Producto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Producto interno

$\langle \cdot, \cdot \rangle$

Norma

$\| \cdot \|$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array} \arrow[r, bend left] & \begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array} \end{tikzcd}$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array} \arrow[r, bend left] & \begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array} \arrow[r, bend left] & \begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array} \end{tikzcd}$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array}} \arrow[r, bend left, "\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array}} \arrow[r, bend left, "d(u,v) := \|u - v\|"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array}} \arrow[r, bend left, "\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array}} \arrow[r, bend left, "d(u,v) := \|u-v\|"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array}} \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array} \arrow[r, bend left, "\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}"] & \begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array} \arrow[r, bend left, "d(u,v) := \|u - v\|"] & \begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array} \arrow[l, bend left, "\|u\| = d(u, 0_H)"]
\end{tikzcd}$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array} \arrow[r, bend left, "\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}"] & \begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array} \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left, "d(u,v) := \|u - v\|"] & \begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array} \arrow[l, bend left, "\|u\| = d(u, 0_H)"]
\end{tikzcd}
$$

Repaso: el producto interno, la norma inducida y la distancia inducida

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\begin{array}{c}\text{Producto interno}\\ \langle\cdot,\cdot\rangle\end{array} \arrow[r, bend left, "\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}"] & \begin{array}{c}\text{Norma}\\ \|\cdot\|\end{array} \arrow[l, bend left, "\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|u + \mathrm{i}^k \, v\|^2"] \arrow[r, bend left, "d(u, v) := \|u - v\|"] & \begin{array}{c}\text{Distancia}\\ d\end{array} \arrow[l, bend left, "\|u\| = d(u, 0_H)"]
\end{tikzcd}
$$

Repaso: el operador adjunto

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Enonces existe un único T en $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ tal que

$$\forall x \in H_1 \quad \forall y \in H_2 \qquad \langle Sx, y \rangle_{H_2} = \langle x, Ty \rangle_{H_1}.$$

Este operador T se denota por S^* y se llama el operador adjunto de S.

Repaso: la correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas es biyectiva

Para cada S en $\mathcal{B}(H)$, se define $f_S \in \mathcal{S}(H)$,

$$f_S(x, y) := \langle Sx, y \rangle.$$

Repaso: la correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas es biyectiva

Para cada S en $\mathcal{B}(H)$, se define $f_S \in \mathcal{S}(H)$,

$$f_S(x, y) := \langle Sx, y \rangle.$$

La correspondencia $S \mapsto f_S$ es biyectiva.

Repaso: la correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas es biyectiva

Para cada S en $\mathcal{B}(H)$, se define $f_S \in \mathcal{S}(H)$,

$$f_S(x, y) := \langle Sx, y \rangle.$$

La correspondencia $S \mapsto f_S$ es biyectiva.

En otras palabras, si $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle,$$

entonces $S = T$.

Repaso: isometrías entre los espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Una función $f\colon X \to Y$ se llama isometría, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

Repaso: isometrías entre los espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.
Una función $f: X \to Y$ se llama isometría, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

- ¿Es cierto que cada isometría es inyectiva?

Repaso: isometrías entre los espacios métricos

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.
Una función $f\colon X \to Y$ se llama isometría, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

- ¿Es cierto que cada isometría es inyectiva?
- ¿Es cierto que cada isometría es suprayectiva?

Isometrías lineales entre los espacios normados

Ejercicio.

Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal.

Isometrías lineales entre los espacios normados

Ejercicio.

Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal.

Mostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- S es una isometría, es decir, S preserva la distancia;
- S preserva la norma, es decir, $\quad \forall u \in V_1 \quad \|Su\|_{V_2} = \|u\|_{V_1}$.

Isometrías lineales entre los espacios normados

Ejercicio.

Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal.

Mostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- S es una isometría, es decir, S preserva la distancia;
- S preserva la norma, es decir, $\quad \forall u \in V_1 \quad \|Su\|_{V_2} = \|u\|_{V_1}$.

En particular, si S es una isometría de V_1 a V_2, entonces $S \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$ y $\|S\| = 1$.

Plan

Criterio de isometrías entre los espacios de Hilbert

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $S^*S = I_{H_1}$.

(b) S preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad \langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}.$$

(c) S preserva la norma:

$$\forall u \in H_1 \qquad \|Su\|_{H_2} = \|u\|_{H_1}.$$

(d) S preserva la distancia:

$$\forall x, y \in H \qquad d_{H_2}(Sx, Sy) = d_{H_1}(x, y).$$

Plan de demostración

Se recomienda demostrar equivalencias entre las afirmaciones “vecinas”:

$$\text{(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(b)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(c)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(d)}.$$

Plan de demostración

Se recomienda demostrar equivalencias entre las afirmaciones "vecinas":

$$\text{(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(b)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(c)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(d)}.$$

Demostremos solamente un par de implicaciones, las demás se dejan como ejercicios.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1}$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y \rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy \rangle_{H_1}$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1}$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} = \langle I_{H_1}x, y\rangle_{H_1}.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} = \langle I_{H_1}x, y\rangle_{H_1}.$$

Hemos mostrado que los operadores S^*S, I_{H_1} inducen la misma forma sesquilineal.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S preserva el producto interno.

Demostremos que $S^*S = I_{H_1}$.

Para cada x, y en H_1,

$$\langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = \langle Sx, Sy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1} = \langle I_{H_1}x, y\rangle_{H_1}.$$

Hemos mostrado que los operadores S^*S, I_{H_1} inducen la misma forma sesquilineal.

Como la correspondencia entre $\mathcal{S}(H_1)$ y $\mathcal{B}(H_1)$ es biyectiva, $S^*S = I_{H_1}$.

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$.

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2}$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} =$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| Sx + \mathrm{i}^k \, Sy \|_{H_2}^2$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| Sx + \mathrm{i}^k \, Sy \|_{H_2}^2 =$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy\rangle_{H_2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sx + \mathrm{i}^k\, Sy\|_{H_2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(x + \mathrm{i}^k\, y)\|_{H_2}^2.$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sx + \mathrm{i}^k \, Sy\|_{H_2}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(x + \mathrm{i}^k \, y)\|_{H_2}^2.$$

Aplicamos la suposición que S preserva la norma,

luego otra vez aplicamos la identidad de polarización:

$$\ldots =$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy\rangle_{H_2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sx + \mathrm{i}^k\, Sy\|_{H_2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(x + \mathrm{i}^k\, y)\|_{H_2}^2.$$

Aplicamos la suposición que S preserva la norma,
luego otra vez aplicamos la identidad de polarización:

$$\ldots = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|x + \mathrm{i}^k\, y\|_{H_1}^2$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sx + \mathrm{i}^k \, Sy\|_{H_2}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(x + \mathrm{i}^k \, y)\|_{H_2}^2.$$

Aplicamos la suposición que S preserva la norma,

luego otra vez aplicamos la identidad de polarización:

$$\ldots = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|x + \mathrm{i}^k \, y\|_{H_1}^2 =$$

Demostración, (c)⇒(b)

Supongamos que S preserva la norma. Demostremos que S preserva el producto interno.

Sean $x, y \in H$. Aplicamos la identidad de polarización:

$$\langle Sx, Sy \rangle_{H_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| Sx + \mathrm{i}^k \, Sy \|_{H_2}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| S(x + \mathrm{i}^k \, y) \|_{H_2}^2.$$

Aplicamos la suposición que S preserva la norma,

luego otra vez aplicamos la identidad de polarización:

$$\ldots = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \| x + \mathrm{i}^k \, y \|_{H_1}^2 = \langle x, y \rangle_{H_1}.$$

Plan

Ejemplo: el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$

$R\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

Ejemplo: el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$

$R\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$R\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Ejemplo: el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$

$R\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$R\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Mostrar que R es una isometría.

Ejemplo: el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$

$R\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$R\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Mostrar que R es una isometría.

Mostrar que R no es sobre.

Ejemplo: el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$

$R\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Rx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$R\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Mostrar que R es una isometría.

Mostrar que R no es sobre.

Encontrar R^* y mostrar de manera directa que $R^* R = I$.

Ejemplo: otra isometría $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k/2}, & k \text{ es par;} \\ 0, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo: otra isometría $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k/2}, & k \text{ es par;} \\ 0, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots).$$

Ejemplo: otra isometría $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k/2}, & k \text{ es par;} \\ 0, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Ejemplo: otra isometría $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k/2}, & k \text{ es par;} \\ 0, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Mostrar que S no es sobre.

Ejemplo: otra isometría $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k/2}, & k \text{ es par;} \\ 0, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Mostrar que S no es sobre.

Encontrar S^* y mostrar de manera directa que $S^*S = I$.

Ejemplo: una permutación de componentes en $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \text{ es par;} \\ x_{k+1}, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo: una permutación de componentes en $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \text{ es par;} \\ x_{k+1}, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots).$$

Ejemplo: una permutación de componentes en $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \text{ es par;} \\ x_{k+1}, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Ejemplo: una permutación de componentes en $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \text{ es par;} \\ x_{k+1}, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Mostrar que $S^* = S$ y $S^2 = I$.

Ejemplo: una permutación de componentes en $\ell^2(\mathbb{N})$

Definimos $S\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(Sx)_k := \begin{cases} x_{k-1}, & k \text{ es par;} \\ x_{k+1}, & k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En otras palabras,

$$S\colon \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots).$$

Mostrar que S es una isometría.

Mostrar que $S^* = S$ y $S^2 = I$.

En particular, S es un isomorfismo isométrico.

La proyección ortogonal que proviene de la isometría lineal

Ejercicio.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ una isometría lineal, esto es,

$$S^* S = I_{H_1}.$$

La proyección ortogonal que proviene de la isometría lineal

Ejercicio.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ una isometría lineal, esto es,

$$S^* S = I_{H_1}.$$

Pongamos $P := S\,S^*$.

La proyección ortogonal que proviene de la isometría lineal

Ejercicio.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ una isometría lineal, esto es,

$$S^* S = I_{H_1}.$$

Pongamos $P \coloneqq S\, S^*$.

Notamos que $P \in \mathcal{B}(H_2)$.

La proyección ortogonal que proviene de la isometría lineal

Ejercicio.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ una isometría lineal, esto es,

$$S^* S = I_{H_1}.$$

Pongamos $P \coloneqq S\,S^*$.

Notamos que $P \in \mathcal{B}(H_2)$.

Demostrar que $P^2 = P$ y $P^* = P$.

La proyección ortogonal que proviene de la isometría lineal

Ejercicio.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ una isometría lineal, esto es,

$$S^* S = I_{H_1}.$$

Pongamos $P \coloneqq S\,S^*$.

Notamos que $P \in \mathcal{B}(H_2)$.

Demostrar que $P^2 = P$ y $P^* = P$.

Demostrar que P y S tienen la misma imagen: $\operatorname{im}(P) = \operatorname{im}(S)$.