Límites superiores e inferiores de funciones

Objetivos. Introducir el concepto de límites superiores e inferiores.

Requisitos. Límites de funciones monótonas.

Aplicaciones. Derivadas de Dini.

Los límites superiores e inferiores, se pueden definir en situaciones generales, cuando el dominio es un espacio topológico o cuando en el dominio está dado un filtro o una base de filtro. En estos apuntes nos restringimos a la situación, cuando A es un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \in \operatorname{cl}(A)$.

1 Definición (Límite superior y límite inferior de una función)**.**

$$\limsup_{t\to x} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\}} f(t),$$

$$\liminf_{t\to x} f(t) := \sup_{\delta>0} \inf_{t\in A\cap(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\}} f(t).$$

De manera similar,

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) \;:=\; \inf_{\delta>0} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

2 Ejercicio. Escribir definiciones de $\liminf\limits_{t\to x^-} f(t)$, etc.

Veremos otra forma equivalente, con límites.

3 Proposición. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\inf(A) \le x < \sup(A)$. Entonces*

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos

$$g(\delta) := \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

La función g es creciente. Luego

$$\limsup_{t\to x^+} f(t) = \inf_{\delta>0} g(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} g(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t). \qquad \square$$

4 Ejercicio. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{t\in A\cap(x,x+\delta)} f(t).$$

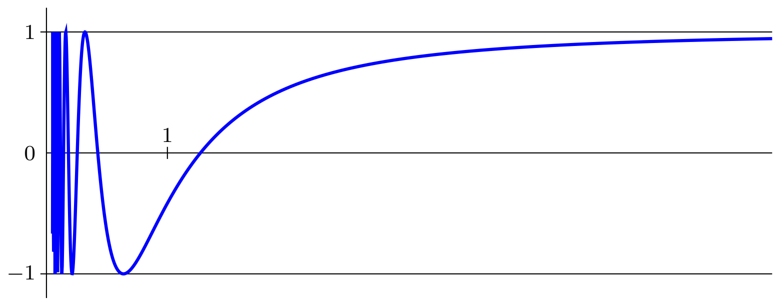
5 Ejercicio. Demostrar que

$$\liminf_{t\to x^+} f(t) \le \limsup_{t\to x^+} f(t).$$

6 Problema. Demostrar que

$$\lim_{t\to x^+} f(t) = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{t\to x^+} f(t) = \limsup_{t\to x^+} f(t) = v.$$

7 Ejemplo. Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \cos\frac{2}{x}$. La gráfica no se puede dibujar bien cerca de $x = 0$.



Calculemos $\liminf_{x\to 0^+} f(x)$. Para cada $\delta > 0$, calculemos

$$g(\delta) \coloneqq \inf_{x\in(0,\delta)} f(x) = \inf_{x\in(0,\delta)} \cos\frac{2}{x}.$$

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos\frac{2}{x} \ge -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesion

$$t_k \coloneqq \frac{2}{(2k+1)\pi}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo:

$$f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1.$$

Pongamos $m \coloneqq \lfloor\frac{1}{\pi\delta}\rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0,\delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \qquad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$. Conclusión final:

$$\liminf_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} (-1) = -1.$$