Límite superior y límite inferior de una sucesión

Objetivos. Definir las nociones de los límites superior e inferior de una sucesión y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Supremo e ínfimo de un conjunto. Trabajo con desigualdades, supremos e ínfimos.

1. Notación. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto de índices. Entonces en vez de $\sup\{a_n \colon n \in I\}$ se escribe $\sup\limits_{n\in I} a_n$.

2. Proposición. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\overline{\mathbb{R}}$, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Demostración. Denotemos $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ por b. Consideremos tres casos: $b = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ y $b = +\infty$.

1. Sea $b = -\infty$. Entonces $a_n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como se sabe, el límite de una sucesión constante es igual a su (único) valor.

2. Sea $b \in \mathbb{R}$ y sea U una vecindad de b. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset U$. El número $b - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > b - \varepsilon$. Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para cualquier $n \ge k$ obtenemos $a_n \ge a_k > b - \varepsilon$. Por otro lado, $a_n \le b < b + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado que $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ y por lo tanto $a_n \in U$ para todo $n \ge k$.

3. Sea $b = +\infty$ y sea U una vecindad de b. Entonces existe un $E > 0$ tal que $(E, +\infty] \subset U$. El número E no es cota superior del conjunto $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$, por lo tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > E$. Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para cualquier $n \ge k$ obtenemos $a_n \ge a_k > E$. Por otro lado, $a_n \le +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado que $a_n \in (E, +\infty]$ y por lo tanto $a_n \in U$ para todo $n \ge k$. $\square$

3. Proposición. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suseción en $\overline{\mathbb{R}}$. Definimos una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mediante la regla

$$a_k \coloneqq \sup_{n\ge k} x_n.$$

Entonces la sucesión a es decreciente.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_n \colon\ n \ge k+1\} \subset \{x_n \colon\ n \ge k\}$, y de esta contención se sigue la desigualdad $a_{k+1} \le a_k$. $\square$

4. Definición (el límite superior de una sucesión). Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Su *límite superior* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \coloneqq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\ge k} x_n.$$

Los resultados escritos antes de la definición implican que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\ge k} x_n.$$

5. Ejercicio. Escriba la definición del límite inferior en forma “el supremo de ínfimos de colas”. Justifique que el límite inferior se puede escribir también como “el límite de ínfimos de colas”.

Vamos a demostrar un criterio de límite superior en términos de cuantificadores y desigualdades, sin usar conceptos de nivel más alto tales como cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos. Necesitamos repasar ciertos criterios útiles.

6. Lema (supremos, ínfimos y desigualdades, repaso). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Recuerde demostraciones de las siguientes afirmaciones:

$$\sup(A) \le b \quad\Longleftrightarrow\quad \forall a\in A \quad a \le b. \tag{1}$$
$$\sup(A) < b \quad\Longrightarrow\quad \forall a\in A \quad a < b. \tag{2}$$
$$\sup(A) \le b \quad\Longleftarrow\quad \forall a\in A \quad a < b. \tag{3}$$
$$\sup(A) > b \quad\Longleftrightarrow\quad \exists a\in A \quad a > b. \tag{4}$$
$$\sup(A) \ge b \quad\Longleftarrow\quad \exists a\in A \quad a \ge b. \tag{5}$$
$$\sup(A) > b \quad\Longrightarrow\quad \exists a\in A \quad a \ge b. \tag{6}$$

También justifique las afirmaciones similares para inf:

$$\inf(A) \ge b \quad\Longleftrightarrow\quad \forall a\in A \quad a \ge b. \tag{7}$$
$$\inf(A) > b \quad\Longrightarrow\quad \forall a\in A \quad a > b. \tag{8}$$
$$\inf(A) \ge b \quad\Longleftarrow\quad \forall a\in A \quad a > b. \tag{9}$$
$$\inf(A) < b \quad\Longleftrightarrow\quad \exists a\in A \quad a < b. \tag{10}$$
$$\inf(A) \le b \quad\Longleftarrow\quad \exists a\in A \quad a \le b. \tag{11}$$
$$\inf(A) < b \quad\Longleftarrow\quad \exists a\in A \quad a \le b. \tag{12}$$

Notamos que en (4) y (10) se usan desigualdades estrictas. El siguiente lema nos ayuda pasar de desigualdades no estrictas a desigualdades estrictas.

7. Lema (pasar de una desigualdad no estricta a desigualdades estrictas). Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\alpha \le \beta \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\gamma > \beta \quad \gamma > \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\gamma > \beta \quad \gamma \ge \alpha. \tag{13}$$
$$\alpha \ge \beta \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\gamma < \beta \quad \gamma < \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\gamma < \beta \quad \gamma \le \alpha. \tag{14}$$

8. Lema (criterio de que el límite superior es menor o igual que un número dado). Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

Demostración. Usamos la siguiente notación:

$$u_k \coloneqq \sup_{n\ge k} x_n, \qquad L \coloneqq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Demostremos la implicación $\Longrightarrow$. Supongamos que

$$L \le b.$$

Por el criterio (13),

$$\forall c > b \qquad c > L.$$

Sustituimos la definición de L:

$$\forall c > b \qquad c > \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k.$$

Usamos (10):

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad u_k < c.$$

Sustituimos la definición de u_k:

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n < c.$$

Aplicamos la regla (2):

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

Ahora demostremos la implicación $\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

Aplicamos la regla (3):

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n \le c.$$

Usamos la notación u_k:

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad u_k \le c.$$

Por (11) concluimos que

$$\forall c > b \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k \le c.$$

Aplicamos la notación L:

$$\forall c > b \qquad L \le c.$$

Aplicamos el criterio (13):

$$L \le b. \qquad \square$$

9. Lema (criterio de que el límite superior es mayor o igual que un número dado). Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Demostración. Usamos la notación del Lema anterior. Demostremos la implicación $\Longrightarrow$. Supogamos que

$$L \ge b.$$

Por el criterio (14),

$$\forall a < b \qquad L > a.$$

Sustituimos la definición de L:

$$\forall a < b \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k > a.$$

Aplicamos (8):

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k > a.$$

Sustituimos la definición de u_k:

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n > a.$$

Aplicamos (4):

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Ahora demostremos la implicación $\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Aplicamos (4):

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n > a.$$

Usamos la notación u_k:

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k > a.$$

Aplicamos la regla (9):

$$\forall a < b \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k \ge a.$$

Usamos la notación L:

$$\forall a < b \qquad L \ge a.$$

Aplicamos el criterio (14):

$$L \ge b. \qquad \square$$

10. Teorema (criterio de límite superior). Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = b$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Para cualquier $c > b$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < c$ para todo $n \geq k$.

2. Para cualquier $a < b$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq k$ tal que $x_n > a$.

Demostración. Se sigue de los Lemas 8 y 9. □

11. Ejercicio. Enuncie y demuestre una proposición similar para el límite inferior.

12. Relación entre el límite superior y el límite inferior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, comparar $\inf_{n\geq k} x_n$ con $\sup_{n\geq k} x_n$, y luego pasar al límite cuando $k \to \infty$. □

13. Teorema (criterio de la existencia de límite en términos de $\limsup$ y $\liminf$). Sea $x = (x_n)$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la sucesión x_n tiene un límite en $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Si se cumplen estas condiciones, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n. \tag{15}$$

Demostración. Supongamos que $L \in \overline{\mathbb{R}}$ y $_{n\to\infty} x_n = b$. De la estructura de vecindades en $\overline{\mathbb{R}}$ se sigue que

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n < c, \tag{16}$$

y

$$\forall a < b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n > a. \tag{17}$$

De (16) se sigue que $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq b$, y de (17) se sigue que $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq b$. Tomando en cuenta que $\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n$, se obtiene la igualdad (15).

Ahora supongamos que se cumple (b) y denotamos $\limsup_{n\to\infty} x_n$ por b. De la desigualdad $\limsup_{n\to\infty} x_n \leq b$ obtenemos (16), y de la desigualdad $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq b$ obtenemos (17). De (16) y (17) se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. □