Criterios de desigualdades elementales
el límite superior y el límite inferior de una sucesión

Objetivos. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y un elemento b de $\overline{\mathbb{R}}$, encontrar criterios (condiciones necesarias y suficientes) para cada una de las siguientes desigualdades:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le b, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n \ge b, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n \le b, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n \ge b.$$

Requisitos. Supremo e ínfimo de un conjunto, criterios de desigualdades para el supremo y el ínfimo, la definición del límite superior y del límite inferior.

1 Definición (definiciones del límite superior y del límite inferior de una sucesión, repaso)**.** Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Su *límite superior* y su *límite inferior* se definen mediante las siguientes fórmulas:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \coloneqq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\ge k} x_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\ge k} x_n.$$

Criterios de desigualdades para sup e inf, repaso

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Recordemos algunas propiedades demostradas anteriormente:

$$\sup(A) \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \le b, \tag{1}$$

$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a > b, \tag{2}$$

También se cumplen afirmaciones similares para inf:

$$\inf(A) \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \quad a \ge b, \tag{3}$$

$$\inf(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a < b, \tag{4}$$

Además, necesitamos un par de reglas que relacionan desigualdades estrictas con las desigualdades inestrictas.

2 Lema. *Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\alpha \le \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \gamma > \beta \quad \alpha \le \gamma, \tag{5}$$

$$\alpha \le \beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \gamma < \alpha \quad \gamma \le \beta. \tag{6}$$

Idea de demostración. Si $\alpha > \beta$, entonces se puede construir γ tal que $\beta < \gamma < \alpha$. □

3 Proposición (criterio de que el límite superior es menor o igual que un número dado)**.** *Sea* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\overline{\mathbb{R}}$ *y sea* $b \in \overline{\mathbb{R}}$*. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

Demostración. Usamos la siguiente notación:

$$u_k \coloneqq \sup_{n\ge k} x_n, \qquad L \coloneqq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Demostremos la implicación $\Longrightarrow$. Supongamos que

$$L \le b.$$

Por la definición de $\limsup$,

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} u_k \le b.$$

Para esta desigualdad no tenemos criterios simples. Pasamos a una desigualdad estricta:

$$\forall c > b \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k < c.$$

Aplicamos el criterio (4):

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad u_k < c.$$

En la afirmación interior, para cada $n \ge k$ tenemos $x_n \le u_k$, luego

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

Ahora demostremos la implicación $\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \ge k \qquad x_n < c.$$

La desigualdad estricta $x_n < c$ implica la desigualdad no estricta $x_n \le c$, y por el criterio (1) obtenemos

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n \le c.$$

Usamos la notación u_k:

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad u_k \le c.$$

Luego, por la definición de L,

$$\forall c > b \qquad L \le c.$$

Por el criterio (5),

$$L \le b. \qquad \square$$

4 Proposición (criterio de que el límite superior es mayor o igual que un número dado)**.** *Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \ge b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Demostración. Usamos la notación de la proposición anterior. Demostremos la implicación $\Longrightarrow$. Supogamos que

$$L \ge b.$$

Entonces

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} u_k \ge b.$$

Por el criterio (3),

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k \ge b.$$

Sustituimos la definición de u_k:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n \ge b.$$

Para la desigualdad $\sup_{n\ge k} x_n \ge b$ no tenemos criterio simple, por eso pasamos a una desigualdad estricta:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall a < b \qquad \sup_{n\ge k} x_n > a.$$

Usamos el criterio (2):

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall a < b \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Los dos cuantificadores $\forall$ se pueden intercambiar:

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Ahora demostremos la implicación $\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \exists n \ge k \qquad x_n > a.$$

Aplicamos el criterio (2):

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \sup_{n\ge k} x_n > a.$$

Usamos la notación u_k:

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k > a.$$

De la desigualdad estricta $u_k > a$ sale la desigualdad inestricta $u_k \ge a$:

$$\forall a < b \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k \ge a.$$

Aplicamos el criterio (3):

$$\forall a < b \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} u_k \ge a.$$

Usamos la notación L:

$$\forall a < b \qquad L \ge a.$$

Aplicamos el criterio (6):

$$L \ge b. \qquad \square$$

5 Teorema (criterio para que un número sea el límite superior de una sucesión)**.** *Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = b$ si, y sólo si, se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *Para cualquier $c > b$ existe un k en $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$ se cumple $x_n < c$.*
2. *Para cualquier $a < b$ y cualquier k en $\mathbb{N}$ existe un $n \geq k$ tal que $x_n > a$.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 3 y 4. □

6 Ejercicio. Enunciar y demostrar una proposición similar para el límite inferior.

7 Proposición (relación entre el límite superior y el límite inferior, repaso)**.** *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

8 Teorema (criterio de existencia del límite en términos de $\limsup$ y $\liminf$)**.** *Sea $x = (x_n)$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) la sucesión x_n tiene un límite en $\overline{\mathbb{R}}$;

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Si se cumplen estas condiciones, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n. \tag{7}$$

Demostración. Supongamos que $L \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. De la estructura de vecindades en $\overline{\mathbb{R}}$ se sigue que

$$\forall c > b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n < c, \tag{8}$$

y

$$\forall a < b \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n > a. \tag{9}$$

De (8) se sigue que $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$, y de (9) se sigue que $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$. Tomando en cuenta el resultado de la Proposición 7, obtenemos

$$b \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq b.$$

Esta cadena de desigualdades implica que (7).

Ahora supongamos que se cumple (b) y denotamos $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ por b. De la desigualdad $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$ obtenemos (8), y de la desigualdad $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$ obtenemos (9). De (8) y (9) se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. □