

Criterios de desigualdades elementales para el límite superior y el límite inferior de una sucesión

Objetivos. Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ y un elemento b de $\overline{\mathbb{R}}$, encontrar criterios (condiciones necesarias y suficientes) para cada una de las siguientes desigualdades:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b.$$

Requisitos. Supremo e ínfimo de un conjunto, criterios de desigualdades para el supremo y el ínfimo, la definición del límite superior y del límite inferior.

1 Definición (definiciones del límite superior y del límite inferior de una sucesión, repaso). Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Su *límite superior* y su *límite inferior* se definen mediante las siguientes fórmulas:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} x_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq k} x_n.$$

Criterios de desigualdades para sup e inf, repaso

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Recordemos algunas propiedades demostradas anteriormente:

$$\sup(A) \leq b \iff \forall a \in A \quad a \leq b, \quad (1)$$

$$\sup(A) > b \iff \exists a \in A \quad a > b, \quad (2)$$

También se cumplen afirmaciones similares para inf:

$$\inf(A) \geq b \iff \forall a \in A \quad a \geq b, \quad (3)$$

$$\inf(A) < b \iff \exists a \in A \quad a < b, \quad (4)$$

Además, necesitamos un par de reglas que relacionan desigualdades estrictas con las desigualdades inestrictas.

2 Lema. Sean $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\alpha \leq \beta \iff \forall \gamma > \beta \quad \alpha < \gamma, \quad (5)$$

$$\alpha \leq \beta \iff \forall \gamma < \alpha \quad \gamma < \beta. \quad (6)$$

Demostración. Demostremos 5. La implicación \implies se sigue de la propiedad transitiva. Demostremos \impliedby . Supongamos que para cada $\gamma > \beta$, se cumple $\alpha < \gamma$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\alpha > \beta$. Entonces, entonces existe γ en \mathbb{R} tal que $\beta < \gamma < \alpha$. Esto contradice a la suposición. \square

3 Proposición (criterio de que el límite superior es menor o igual que un número dado).
 Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b \iff \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c.$$

Demostración. Usamos la siguiente notación:

$$u_k := \sup_{n \geq k} x_n, \quad L := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demostremos la implicación \implies . Supongamos que

$$L \leq b.$$

Por la definición de \limsup ,

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} u_k \leq b.$$

Para esta desigualdad no tenemos criterios simples. Pasamos a una desigualdad estricta:

$$\forall c > b \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} u_k < c.$$

Aplicamos el criterio (4):

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad u_k < c.$$

En la afirmación interior, para cada $n \geq k$ tenemos $x_n \leq u_k$, luego

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c.$$

Ahora demostremos la implicación \impliedby . Supongamos que

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c.$$

La desigualdad estricta $x_n < c$ implica la desigualdad no estricta $x_n \leq c$, y por el criterio (1) obtenemos

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \geq k} x_n \leq c.$$

Usamos la notación u_k :

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad u_k \leq c.$$

Luego, por la definición de L ,

$$\forall c > b \quad L \leq c.$$

Por el criterio (5),

$$L \leq b. \quad \square$$

4 Proposición (criterio de que el límite superior es mayor o igual que un número dado).
 Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b \iff \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a.$$

Demostración. Usamos la notación de la proposición anterior. Demostremos la implicación \implies . Supongamos que

$$L \geq b.$$

Entonces

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} u_k \geq b.$$

Por el criterio (3),

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k \geq b.$$

Sustituimos la definición de u_k :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \geq k} x_n \geq b.$$

Para la desigualdad $\sup_{n \geq k} x_n \geq b$ no tenemos criterio simple, por eso pasamos a una desigualdad estricta:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a < b \quad \sup_{n \geq k} x_n > a.$$

Usamos el criterio (2):

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a < b \quad \exists n \geq k \quad x_n > a.$$

Los dos cuantificadores \forall se pueden intercambiar:

$$\forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a.$$

Ahora demostremos la implicación \longleftarrow . Supongamos que

$$\forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a.$$

Aplicamos el criterio (2):

$$\forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \geq k} x_n > a.$$

Usamos la notación u_k :

$$\forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k > a.$$

De la desigualdad estricta $u_k > a$ sale la desigualdad inestRICTA $u_k \geq a$:

$$\forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k \geq a.$$

Aplicamos el criterio (3):

$$\forall a < b \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} u_k \geq a.$$

Usamos la notación L :

$$\forall a < b \quad L \geq a.$$

Aplicamos el criterio (6):

$$L \geq b. \quad \square$$

5 Teorema (criterio para que un número sea el límite superior de una sucesión). Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ si, y sólo si, se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Para cualquier $c > b$ existe un k en \mathbb{N} tal que para todo $n \geq k$ se cumple $x_n < c$.
2. Para cualquier $a < b$ y cualquier k en \mathbb{N} existe un $n \geq k$ tal que $x_n > a$.

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 3 y 4. □

6 Ejercicio. Enunciar y demostrar una proposición similar para el límite inferior.

7 Proposición (relación entre el límite superior y el límite inferior, repaso). Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

8 Teorema (criterio de existencia del límite en términos de \limsup y \liminf). Sea $x = (x_n)$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) la sucesión x_n tiene un límite en $\overline{\mathbb{R}}$;
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Si se cumplen estas condiciones, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (7)$$

Demostración. Supongamos que $b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. De la estructura de vecindades en $\overline{\mathbb{R}}$ se sigue que

$$\forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c, \quad (8)$$

y

$$\forall a < b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n > a. \quad (9)$$

De (8) se sigue que $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$, y de (9) se sigue que $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$. Tomando en cuenta el resultado de la Proposición 7, obtenemos

$$b \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b.$$

Esta cadena de desigualdades implica que (7).

Ahora supongamos que se cumple (b) y denotamos $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ por b . De la desigualdad $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$ obtenemos (8), y de la desigualdad $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$ obtenemos (9). De (8) y (9) se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. □