Límites de funciones monótonas

Objetivos. Demostrar que los límites de la función monótona en los extremos de un intervalo coinciden con el supremo e ínfimo del conjunto de sus valores.

Requisitos. Límite por la derecha y por la izquierda, supremo e ínfimo.

Resultados principales

1 Proposición (sobre los límites de una función creciente en los extremos de un intervalo)**.** *Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Denotemos por V la imagen de la función f:*

$$V \coloneqq f[(a,b)] = \{y \in \mathbb{R}\colon \quad \exists x \in (a,b) \quad f(x) = y\}.$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V), \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V). \tag{2}$$

2 Proposición (sobre los límites de una función decreciente en los extremos de un intervalo)**.** *Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Denotemos por V la imagen de la función f:*

$$V \coloneqq f[(a,b)] = \{y \in \mathbb{R}\colon \quad \exists x \in (a,b) \quad f(x) = y\}.$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V), \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V). \tag{4}$$

3 Observación. En este curso aceptamos como un hecho la existencia del supremo e ínfimo de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Las dos proposiciones anteriores afirman, en particular, la existencia de los límites mencionados.

4 Observación. Como se sabe, el valor del límite de una función en un punto depende solamente de los valores de la función en puntos cercanos. Por eso en la fórmula (1) se puede usar cualquiera de las siguientes dos expresiones:

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Demostración para varios casos

Las fórmulas (1)–(4) se demuestran de manera similar. Hay varios casos: $a \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$, $\sup(V) \in \mathbb{R}$ o $\sup(V) = +\infty$, $\inf(V) \in \mathbb{R}$ o $\inf(V) = -\infty$. Consideremos solamente algunos de los casos posibles.

Demostración de (2)*, $a \in \mathbb{R}$, $\inf(V) \in \mathbb{R}$.* Como $\inf(V)$ es un punto finito, usamos vecindades de la forma $(\inf(V)-\varepsilon, \inf(V)+\varepsilon)$. Como el punto a es finito, tenemos que encontrar una vecindad derecha de la forma $(a, a+\delta)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\inf(V) + \varepsilon > \inf(V)$. Como $\inf(V)$ es la máxima cota inferior de V, el número $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V. Luego existe t en (a, b) tal que $f(t) < \inf(V) + \varepsilon$. Pongamos $\delta \coloneqq t - a$. Entonces $t = a + \delta$.

Para cada x en $(a, a + \delta)$, como f es creciente,

$$f(x) \le f(a + \delta) = f(t) < \inf(V) + \varepsilon.$$

Por otro lado, para cada x en $(a, a + \delta)$,

$$f(x) \ge \inf(V) > \inf(V) - \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para cada x en $(a, a+\delta)$, se cumple $f(x) \in (\inf(V)-\varepsilon, \inf(V)+\varepsilon)$. $\square$

Demostración de (3)*, $b = +\infty$, $\inf(V) \in \mathbb{R}$.* Trabajamos con vecindades de $\inf(V)$ de la forma $(\inf(V) - \varepsilon, \inf(V) + \varepsilon)$, y con vecindades de $+\infty$ de la forma $(\Delta, +\infty)$, donde $\Delta > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\inf(V) + \varepsilon$ no es cota inferior de V, y existe t en $(a, +\infty)$ tal que $f(t) < \inf(V) + \varepsilon$. Pongamos $\Delta \coloneqq |t| + 1$. Entonces $\Delta > 0$, y $(\Delta, +\infty]$ es una vecindad canónica de $+\infty$, y su intersección con $(a, +\infty)$ es el intervalo $(\Delta, +\infty)$.

Sea $x \in (\Delta, +\infty)$. Como f es decreciente y $x > \Delta > |t| \ge t$,

$$f(x) \le f(t) < \inf(V) + \varepsilon.$$

Por otro lado,

$$f(x) \ge \inf(V) > \inf(V) - \varepsilon.$$

Hemos mostrado que para cualquier punto x en $(\Delta, +\infty)$ se cumple $f(x) \in (\inf(V) - \varepsilon, \inf(V) + \varepsilon)$. $\square$

Demostración de (3)*, $b \in \mathbb{R}$, $\inf(V) = -\infty$.* Trabajamos con vecindades de $-\infty$ de la forma $[-\infty, -E)$, donde $E > 0$, y con vecindades izquierdas de b de la forma $(b - \delta, b)$.

Sea $E > 0$. Como $\inf(V) = -\infty < -E$, el número $-E$ no es cota inferior de V. Luego existe t en (a, b) tal que $f(t) < -E$. Pongamos $\delta \coloneqq b - t$. Para cada x en $(b - \delta, b)$, usando la monotonía de f, obtenemos

$$f(x) \le f(b - \delta) = f(t) < -E. \qquad \square$$

5 Ejercicio. Escribir bien demostraciones para un par de otros casos.

Ejemplos de aplicaciones

La definición del supremo e ínfimo es un poco más simple que la definición del límite. En algunas situaciones puede ser cómodo primero encontrar el supremo o el ínfimo, y luego hacer conclusiones sobre el límite.

6 Ejemplo. Consideremos $a = -\infty$, $b = +\infty$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lfloor x \rfloor$. Para cualquier $\Delta > 0$ tenemos

$$\sup f[\mathbb{R}] \geq f(\Delta + 1) = \lfloor \Delta + 1 \rfloor > \Delta,$$

luego $\sup f[\mathbb{R}] = +\infty$. Por la fórmula (1) concluimos que

$$\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

En algunas situaciones la función f es restricción de una función g definida en un intervalo más grande que (a, b), y g es continua en el punto b. Entonces el límite de f en b es simplemente el valor de g en b.

7 Ejemplo. Calculemos $\sup g[(a, b)]$, donde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$, $a = 4$, $b = 5$. Definimos f como la restricción de g al intervalo (a, b), luego aplicamos la fórmula (1) y la continuidad de la función g:

$$\sup g[(4, 5)] = \sup f[(4, 5)] = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x \in (4,5)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 5 \\ x \in (4,5)}} g(x) = g(5) = 25.$$

En algunos ejemplos el límite se calcula fácilmente por las propiedades aritméticas del límite. Entonces es cómodo calcular el límie y luego hacer conclusiones sobre el supremo o el ínfimo.

8 Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el dominio $(a, b) = (-1, +\infty)$. De la representación

$$f(x) = \frac{x + 1 - 1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}$$

es fácil concluir que f es creciente. Luego

$$\sup f[(a, b)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$\inf f[(a, b)] = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x + 1} = -\infty.$$