Límites de aplicaciones en espacios métricos y límites de sucesiones

Objetivo: Repasar la relación entre los *límites de aplicaciones en espacios métricos* y los *límites de sucesiones.*

Límites de aplicaciones en espacios métricos

Definición (ε-vecindad de un punto). Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$, $\delta > 0$. El conjunto

$$U(x_0, \delta) := \{x \in X \colon d(x, x_0) < \delta\}$$

se llama *δ-vecindad del punto x_0.*

Definición (base de vecindades de un punto en un espacio métrico). Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$. El conjunto

$$\mathfrak{U}_{x_0} := \{U(x_0, \delta) \colon \delta > 0\}$$

se llama *base canónica de vecindades del punto x_0 en el espacio métrico X.*

Definición (clausura de un conjunto en un espacio métrico). Sean X un espacio métrico, $A \subset X$. La *clausura* (*cerradura*) de A consiste en todos los puntos $x \in X$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathfrak{U}_x$:

$$\operatorname{clos}(A) = \{x \in X \colon \forall U \in \mathfrak{U}_x \quad U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición (límite de una aplicación en un punto). Sean X, Y espacios métricos, $f \colon \operatorname{Def}(f) \to Y$, donde $\operatorname{Def}(f) \subset X$. Sean $x_0 \in \operatorname{clos}(\operatorname{Def}(f))$ y $y_0 \in Y$. La aplicación f *tiene límite y_0 en el punto x_0* (notación: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \to y_0$ cuando $x \to x_0$), si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in \operatorname{Def}(f) \cap U(x_0, \delta) \qquad f(x) \in U(y_0, \varepsilon).$$

En el lenguaje de vecindades:

$$\forall V \in \mathfrak{U}_{y_0} \qquad \exists U \in \mathfrak{U}_{x_0} \qquad \forall x \in \operatorname{Def}(f) \cap U \qquad f(x) \in V.$$

Nota (definición de límite con vecindades punzadas). En la definición del límite, algunos autores usan *vecindades punzadas*:

$$\forall V \in \mathfrak{U}_{y_0} \qquad \exists U \in \mathfrak{U}_{x_0} \qquad \forall x \in \operatorname{Def}(f) \cap U \setminus \{x_0\} \qquad f(x) \in V.$$

Nosotros vamos a usar la primera definición del límite (vecindad *no* punzada).

Definición (continuidad de una aplicación en un punto). Sean X, Y espacios métricos, $f \colon X \to Y$ una aplicación, $x_0 \in X$. Se dice que f *es continua en el punto x_0*, si $f(x) \to f(x_0)$ cuando $x \to x_0$.

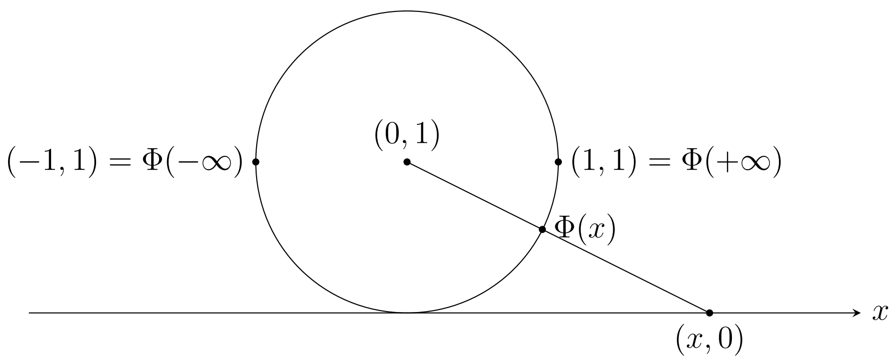
Definición (límite de una sucesión). Sea X un espacio métrico, $x_0 \in X$ un punto en X, $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se dice que x_n *tiene el límite x_0 cuando $n \to \infty$* si

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x_0) \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n > N \qquad x_n \in U.$$

Conjuntos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como espacios métricos

1. Definamos el mapeo $\Phi\colon \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \to \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon u^2 + (v-1)^2 = 1\}$ por la siguiente regla:

- $\Phi(+\infty) = (1, 1)$, $\Phi(-\infty) = (-1, 1)$;
- para $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x)$ es el punto de la intersección de la recta, que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(x, 0)$, con la circunferencia $u^2 + (v-1)^2 = 1$.



Calcular las coordenadas u, v del punto $\Phi(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Definición (métrica en $[-\infty, +\infty]$). Definamos la métrica d_1 en $[-\infty, +\infty]$ por la fórmula:

$$d_1(x_1, x_2) = d(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Calcular $d(\Phi(x_1), \Phi(x_2))$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Calcular $d(\Phi(x), (1, 1))$ para $x \in \mathbb{R}$.
Calcular $d(\Phi(x), (-1, 1))$ para $x \in \mathbb{R}$.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$, $a \in [-\infty, +\infty]$. Entonces:

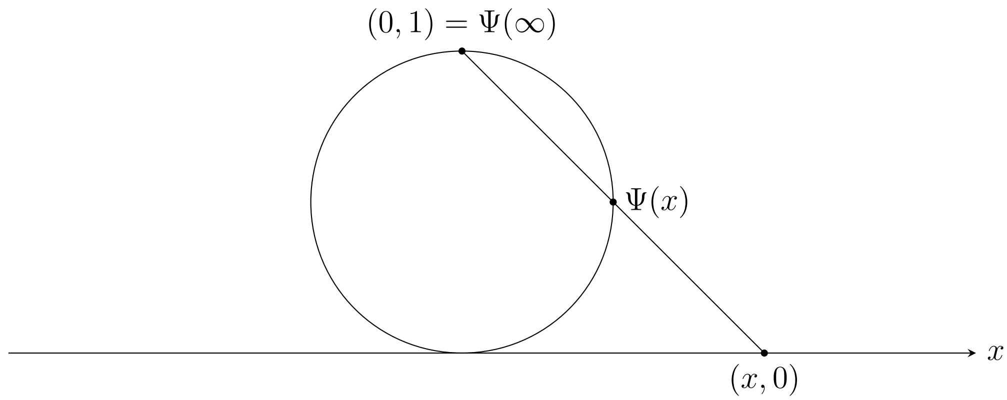
$$x_n \to a \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x_n, a) \to 0.$$

4. Tarea creativa. Hallar una fórmula directa para $d_1(x_1, x_2)$. Considerar varios casos: ambos puntos son infinitos, uno de los puntos es infinito, ambos puntos son finitos. En el último caso la fórmula para $d_2(x_1, x_2)$ debe tener la forma

$$d_1(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| g(x_1, x_2),$$

donde g es una función continua.

5. Definir el mapeo Ψ, usando el siguiente dibujo:



Definición (métrica en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$). Definamos la métrica d_2 en $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ por la fórmula:

$$d_2(x_1, x_2) := d(\Psi(x_1), \Psi(x_2)) \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}).$$

6. Tarea creativa. Hallar una fórmula directa para $d_2(x_1, x_2)$. Considerar dos casos: uno de los puntos es infinito; ambos puntos son finitos. En el último caso la fórmula para $d_2(x_1, x_2)$ debe tener la forma

$$d_2(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| g(x_1, x_2),$$

donde g es una función continua.

7. Sea x_n una sucesión en $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces:

$$x_n \to a \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x_n, a) \to 0.$$

Nota. En particular, el conjunto $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ se puede considerar como un espacio métrico. Esto significa que la convergencia de sucesiones es un caso particular de la convergencia de funciones en espacios métricos.

Y al revés, como muestra el siguiente teorema (el criterio de Heine), los límites de aplicaciones en espacios métricos se pueden reducir a los límites de sucesiones.

Criterio de límite en espacios métricos en términos de sucesiones

8. Teorema (criterio de Heine). Sean X, Y espacios métricos, $f\colon \operatorname{Def}(f) \to Y$ una aplicación, donde $\operatorname{Def}(f) \subset X$. Sean $x_0 \in \operatorname{clos}(\operatorname{Def}(f))$ y $y_0 \in Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f(x) \to y_0$ cuando $x \to x_0$;

(b) para toda sucesión $\{x_n\} \subset \operatorname{Def}(f)$ convergente a x_0 la sucesión $f(x_n)$ converge a y_0.

Demostración. La implicación (a)⇒(b) es simple (tarea). Para (b)⇒(a), usamos una demostración por contradicción (demostración a la inversa).

Supongamos que $f(x) \not\to y_0$ cuando $x \to x_0$:

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall \delta > 0 \qquad \exists x \in \operatorname{Def}(f) \cap U(x_0, \delta) \qquad f(x) \notin U(y_0, \varepsilon).$$

Para $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, eligimos $x_n \in \operatorname{Def}(f) \cap U(x_0, 1/n)$ tales que $f(x_n) \notin U(y_0, \varepsilon)$. Ya que $x_n \in U(x_0, 1/n)$, tenemos que $x_n \to x_0$. Ahora la condición (a) tenemos $f(x_n) \to y_0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tiene $f(x_n) \in U(y_0, \varepsilon)$. Contradicción. $\square$