El lema de Riemann–Lebesgue para los coeficientes de Fourier (un tema del curso Análisis Armónico).

Antonio Jimárez Escamilla
con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de enero de 2021

Plan

Objetivos.

Demostrar el lema de Riemann–Lesbesgue para los coeficientes de Fourier de funciones 2π-periódicas.

Prerrequisitos.

- Funciones 2π-periódicas.
- Coeficientes de Fourier.
- Módulo de continuidad de una función.
- Densidad de $C_c(X)$ en $L^1(X)$.

Plan

Definición (Coeficientes de Fourier)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

Definición (Coeficientes de Fourier)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

Proposición (Una cota superior para los coeficientes de Fourier)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}_k| \leq \|f\|_{1,2\pi\text{-per}}.$$

Proposición (Las integrales de una función 2π-periódica)

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definición (El módulo de continuidad de una función)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\omega_f(\eta) \coloneqq \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in \mathbb{R},\ |a - b| \le \eta\}.$$

Definición (El módulo de continuidad de una función)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\omega_f(\eta) := \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in \mathbb{R},\ |a-b| \le \eta\}.$$

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x-y|).$$

Proposición (Continuidad uniforme para funciones de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$)

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $f \in C_u(\mathbb{R})$, esto es,

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Proposición (Continuidad uniforme para funciones de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$)

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces $f \in C_u(\mathbb{R})$, esto es,

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

Idea: primero usar el hecho que f es uniformemente continua en $[0, 2\pi]$, luego aplicar la periodicidad.

Proposición (Densidad de las funciones continuas de soporte compacto en L^1)

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular μ. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^1(X, \mu)$.

Proposición (Densidad de las funciones continuas de soporte compacto en L^1)

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular μ. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^1(X, \mu)$.

Proposición

$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es denso en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Proposición (Densidad de las funciones continuas de soporte compacto en L^1)

Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto con una medida regular μ. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^1(X, \mu)$.

Proposición

$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es denso en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Idea. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la proposición anterior a $f|_{(0,2\pi)}$, encontrar $g \in C_c((0, 2\pi))$ tal que $\|g - f|_{(0,2\pi)}\|_1 < \varepsilon$. Luego

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 2\pi^-} g(x) = 0,$$

y podemos extender g a una función de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Plan

Lema de Riemann-Lebesgue para funciones continuas 2π- periódicas

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x.$$

Suponiendo $k \neq 0$, hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k(y+\pi/k)}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \pi}\, \mathrm{d}y$$

usamos que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \pi} = -1$, luego aplicamos la periodicidad:

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{d}y = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{d}y.$$

Hemos mostrado que

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

A esta igualdad le sumamos la igualdad que define $\widehat{f}_k$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y,$$

y dividimos entre -2. Obtenemos

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Por definición del módulo de continuidad,

$$\left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| \leq \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Luego

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| \mathrm{d}y \leq \frac{1}{2}\, \omega_f\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Como $f \in C_u(\mathbb{R})$, y por el criterio de una función uniformemente continua

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Plan

Teorema (Lema de Riemann–Lebesgue para funciones integrables 2π-periódicas)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

Como $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es denso en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, aplicando el lema para funciones continuas a g, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad |k| \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geq m$, obtenemos

$$|\widehat{f}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq \|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} + |\widehat{g}_k| < \varepsilon.$$