

Núcleos

Objetivos. Definir el concepto de *núcleos*, conocidos también como *funciones positivamente definidas en el sentido no estricto*. Demostrar el criterio en términos de determinantes (el criterio de Sylvester para núcleos), la propiedad hermítica y la desigualdad de Schwarz para núcleos.

Prerrequisitos. Matrices positivas, el criterio de Sylvester para matrices positivas.

1 Definición (núcleo). Sea X un conjunto. Una función $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *núcleo* si para cada m , cualesquiera x_1, \dots, x_m en X y cualesquiera $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ en \mathbb{C} ,

$$\sum_{r,s=1}^m \overline{\lambda_r} \lambda_s K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Identificamos la función K de clase \mathbb{C}^{X^2} con la familia de funciones $(K_x)_{x \in X}$ de clase \mathbb{C}^X , poniendo

$$K_x(y) := K(y, x).$$

Consideramos el conjunto de funciones \mathbb{C}^X como espacio vectorial complejo, con operaciones naturales (punto a punto).

2 Definición. Sean $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$. Denotamos por $G_K(x_1, \dots, x_m)$ la siguiente matriz:

$$G_K(x_1, \dots, x_m) := [K(x_r, x_s)]_{r,s=1}^m = [K_{x_s}(x_r)]_{r,s=1}^m.$$

La matriz $G_K(x_1, \dots, x_m)$ se conoce como la matriz de Gram asociada a la función K y los puntos x_1, \dots, x_m . Estas matrices aparecen en trabajos de Mercer, Moore, y otros matemáticos.

3 Proposición (repasso: criterio de matrices positivas). *Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) Existe B en $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.
- (b) $A^* = A$ y $\text{Sp}(A) \subseteq [0, +\infty)$.

(c) La forma cuadrática q_A es positiva, esto es, $\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0$ para cada ξ en \mathbb{C}^n .

(d) $A^* = A$ y para cada $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $\det(A_J^J) \geq 0$.

Usamos la notación $A \geq 0$, cuando la matriz A cumple con alguna condición de la Proposición 3. La equivalencia de las condiciones (c) y (d) en la Proposición 3 se conoce como el criterio de Sylvester.

4 Proposición (criterio de núcleo en términos de matrices positivas). Sea $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en \mathbb{N} y cada x_1, \dots, x_m en X , $G_K(x_1, \dots, x_m) \geq 0$.

Demostración. Dados m en \mathbb{N} y x_1, \dots, x_m , consideremos la forma cuadrática $q: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ asociada a la matriz $G_K(x_1, \dots, x_m)$:

$$q(\xi) := \langle G_K(x_1, \dots, x_m)\xi, \xi \rangle = \xi^* G_K(x_1, \dots, x_m)\xi.$$

En términos de las componentes de λ ,

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \sum_{r=1}^m \bar{\xi}_r (G_K(x_1, \dots, x_m)\xi)_r = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \bar{\xi}_r \xi_s (G_K(x_1, \dots, x_m))_{r,s} \\ &= \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \bar{\xi}_r \xi_s K(x_r, x_s). \end{aligned}$$

La última suma doble coincide con la expresión escrita en la Definición 1. La condición $q \geq 0$ significa que $G_K(x_1, \dots, x_m) \geq 0$. \square

5 Proposición (la propiedad hermítica para núcleos). Sea $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo. Entonces para cada x, y en X se tiene

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)}.$$

Demostración. Consideremos la matriz

$$G_K(x, y) = \begin{bmatrix} K(x, x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Por la Proposición 4, la matriz $G_K(x, y)$ es positiva. Luego, del criterio de matrices positivas, se sigue que $G_K(x, y)$ es autoadjunta. Por lo tanto, $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$. \square

6 Proposición (criterio de Sylvester para núcleos). Sea $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$ para cada x, y en X . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en \mathbb{N} y cada x_1, \dots, x_m en X ,

$$\det(G_K(x_1, \dots, x_m)) \geq 0.$$

Demostración. Sea K un núcleo y sean $x_1, \dots, x_m \in X$. Entonces $G_K(x_1, \dots, x_m) \geq 0$. Por el criterio de Sylvester, esto implica que $\det(G_K(x_1, \dots, x_m)) \geq 0$.

Supongamos que se cumple la condición (b). Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$. Pongamos $A := G_K(x_1, \dots, x_m)$. Tenemos que trabajar con los “menores principales” de la matriz A , en el sentido general. Dado un subconjunto $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ de $\{1, \dots, m\}$, consideramos la submatriz de la matriz A ubicada en los renglones y las columnas del conjunto J :

$$A_J^J := [A_{j_r, j_s}]_{r, s=1}^p.$$

Observamos que

$$A_J^J = [K(x_{j_r}, x_{j_s})]_{r, s=1}^p = G_K(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}).$$

Aplicamos la condición (b) con los puntos x_{j_1}, \dots, x_{j_p} y concluimos que $\det(A_J^J) \geq 0$. El subconjunto J de $\{1, \dots, m\}$ es general. Debido al criterio de Sylvester, hemos demostrado que $A \geq 0$. \square

7 Proposición (la desigualdad de Schwarz para los núcleos). Sea $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo y sean $x, y \in X$. Entonces

$$|K(x, y)|^2 \leq K(x, x)K(y, y). \quad (2)$$

Demostración. Igual que en la demostración de la Proposición 5, consideremos la matriz (1). Por la Proposición 6, tenemos que $\det(G_K(x, y)) \geq 0$, esto es,

$$K(x, x)K(y, y) - |K(x, y)|^2 \geq 0. \quad \square$$

Idea de segunda demostración. Se puede razonar similar a la demostración de la desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos, aplicando la definición del núcleo con escalares ξ_1, ξ_2 apropiados. \square

En el caso real no hay análogo de la Proposición 5, y hay que pedir de manera explícita la propiedad simétrica en la definición del núcleo.

Una función $K: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *simétrica*, si para cada x, y en X se cumple la igualdad $K(y, x) = K(x, y)$.

8 Definición (núcleo real). Sea X un conjunto. Una función $K: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *núcleo real* si K es simétrica y para cada m , cualesquiera x_1, \dots, x_m en X y cualesquiera $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ en \mathbb{R} ,

$$\sum_{r,s=1}^m \lambda_r \lambda_s K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Para los núcleos reales se tienen análogos de las Proposiciones 4, 6 y 7, pero en todos lados hay que suponer desde el principio que K sea simétrica.