Iteraciones de una función cuyo codominio coincide con el dominio

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)

Escuela Superior de Física y Matemáticas

30 de agosto de 2022

Objetivos

- Definir de manera formal el concepto

$$f^{[n]} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

- Demostrar una de las propiedades principales:

$$f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[m+n]}, \qquad (f^{[m]})^{[n]} = f^{[mn]}.$$

- Considerar la sucesión $(f^{[n]}(x))_{n=0}^{\infty}$ y darle otras descripciones equivalentes.

Prerrequisitos.

- Composición de funciones.
- Inducción matemática.

Temas similares en álgebra.

- Definición de potencias naturales de números racionales o reales.
- Definición de potencias de elementos en un grupo o en un monóide.

Aplicaciones y conexiones con otras áreas

- El teorema del punto fijo de Banach para funciones contractivas.
- Varios métodos numéricos:
  el método del gradiente (= el método de Newton), etc.
- Varios métodos iterativos en álgebra lineal numérica:
  los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel,
  los métodos del gradiente y del gradiente conjugado,
  los metodos QR, Lanczos, etc.
- Sistemas dinámicos discretos, teoría del caos.
- Cadenas de Márkov discretas.

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Sean $f\colon X \to X$, $g\colon X \to X$.

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Sean $f\colon X \to X$, $g\colon X \to X$.

La función $f \circ g\colon X \to X$ se define mediante la regla

$$(f \circ g)(a) :=$$

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Sean $f \colon X \to X$, $g \colon X \to X$.

La función $f \circ g \colon X \to X$ se define mediante la regla

$$(f \circ g)(a) \coloneqq f(g(a))$$

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Sean $f\colon X \to X$, $g\colon X \to X$.

La función $f \circ g\colon X \to X$ se define mediante la regla

$$(f \circ g)(a) := f(g(a)) \qquad (a \in X).$$

Notación para la composición de funciones, repaso

Sea X un conjunto.

Consideremos funciones que tienen el mismo dominio y codominio X.

Sean $f\colon X \to X$, $g\colon X \to X$.

La función $f \circ g\colon X \to X$ se define mediante la regla

$$(f \circ g)(a) := f(g(a)) \qquad (a \in X).$$

Se sabe que la composición de funciones tiene propiedad asociativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Notación para la función identidad

Sea X un conjunto.

Notación para la función identidad

Sea X un conjunto.

Denotemos por id_X la función identidad:

$$\mathrm{id}_X \colon X \to X,$$

Notación para la función identidad

Sea X un conjunto.

Denotemos por id_X la función identidad:

$$\mathrm{id}_X \colon X \to X,$$

$$\mathrm{id}_X(a) \coloneqq a \qquad (a \in X).$$

Iteraciones de una función cuyo contradominio coincide con el dominio

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Iteraciones de una función cuyo contradominio coincide con el dominio

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Definimos una sucesión de funciones $\quad (f^{[n]})_{n=0}^{\infty}, \quad f^{[n]}\colon X \to X, \quad$ de manera recursiva:

$$f^{[0]} := \mathrm{id}_X,$$

Iteraciones de una función cuyo contradominio coincide con el dominio

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Definimos una sucesión de funciones $\quad (f^{[n]})_{n=0}^{\infty}, \quad f^{[n]}\colon X \to X, \quad$ de manera recursiva:

$$f^{[0]} := \mathrm{id}_X,$$

$$f^{[n+1]} := f^{[n]} \circ f.$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \ -x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \ -x, \qquad f^{[2]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \, - \, x, \qquad f^{[2]}(x) = x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \, -x, \qquad f^{[2]}(x) = x, \qquad f^{[3]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = -x, \qquad f^{[2]}(x) = x, \qquad f^{[3]}(x) = -x.$$

Ejemplo

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \,-\,x, \qquad f^{[2]}(x) = x, \qquad f^{[3]}(x) = \,-\,x.$$

En general, para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = -x, \qquad f^{[2]}(x) = x, \qquad f^{[3]}(x) = -x.$$

En general, para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n]}(x) = (-1)^n\, x.$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := -x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = \,-\,x, \qquad f^{[2]}(x) = x, \qquad f^{[3]}(x) = \,-\,x.$$

En general, para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n]}(x) = (-1)^n\, x.$$

La demostración formal de la fórmula se hace por inducción.

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) = 10 + x,$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) = 10 + x, \qquad f^{[3]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) = 10 + x, \qquad f^{[3]}(x) = 15 + x.$$

Ejemplo

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) = 10 + x, \qquad f^{[3]}(x) = 15 + x.$$

En general, para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n]}(x) =$$

Ejemplo

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 5 + x.$$

Entonces

$$f^{[0]}(x) = x, \qquad f^{[1]}(x) = 5 + x, \qquad f^{[2]}(x) = 10 + x, \qquad f^{[3]}(x) = 15 + x.$$

En general, para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n]}(x) = 5n + x.$$

Ejercicios

Calcular $f^{[n]}$ para cada una de las siguientes funciones.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq 3\,x.$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq x^2.$

Composición de dos iteraciones de una función

Proposición

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$.

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]}$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n)\colon \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} =$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} = f^{[m]}$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} = f^{[m]} =$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} = f^{[m]} = f^{[m]} \circ \mathrm{id}_X$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} = f^{[m]} = f^{[m]} \circ \mathrm{id}_X \; =$$

Demostración, inicio

Fijamos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\mathcal{A}(n): \quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Demostremos la sucesión de afirmaciones $(\mathcal{A}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ por inducción.

Verifiquemos $\mathcal{A}(0)$:

$$f^{[m+0]} = f^{[m]} = f^{[m]} \circ \mathrm{id}_X = f^{[m]} \circ f^{[0]}.$$

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]}$$

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=\!=} f^{[(m+n)+1]}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=} \left(f^{[m]} \circ f^{[n]}\right) \circ f$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=} \left(f^{[m]} \circ f^{[n]}\right) \circ f$$

$$\overset{(4)}{=\!=}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

(4) la propiedad asociativa de $\circ$,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=} \left(f^{[m]} \circ f^{[n]}\right) \circ f$$

$$\overset{(4)}{=\!=} f^{[m]} \circ \left(f^{[n]} \circ f\right)$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

(4) la propiedad asociativa de $\circ$,

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=} \left(f^{[m]} \circ f^{[n]}\right) \circ f$$

$$\overset{(4)}{=\!=} f^{[m]} \circ \left(f^{[n]} \circ f\right) \overset{(5)}{=\!=}$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

(4) la propiedad asociativa de $\circ$,

(5) la definición de las iteraciones de una función.

Demostración, final

Hemos fijado m y denotado por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación: $\quad f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}$.

Supongamos $\mathcal{A}(n)$ y verifiquemos $\mathcal{A}(n+1)$:

$$f^{[m+(n+1)]} \overset{(1)}{=\!=} f^{[(m+n)+1]} \overset{(2)}{=\!=} f^{[m+n]} \circ f \overset{(3)}{=\!=} \left(f^{[m]} \circ f^{[n]}\right) \circ f$$

$$\overset{(4)}{=\!=} f^{[m]} \circ \left(f^{[n]} \circ f\right) \overset{(5)}{=\!=} f^{[m]} \circ f^{[n+1]}.$$

(1) la propiedad asociativa de $+$ en $\mathbb{N}_0$,

(2) la definición de las iteraciones de una función,

(3) la hipótesis de inducción,

(4) la propiedad asociativa de $\circ$,

(5) la definición de las iteraciones de una función.

Hemos demostrado que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Hemos demostrado que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Corolario

Sea X un conjunto y sea $f : X \to X$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Hemos demostrado que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Corolario

Sea X un conjunto y sea $f : X \to X$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Demostración:

Hemos demostrado que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Corolario

Sea X un conjunto y sea $f : X \to X$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Demostración: aplicar la propiedad anterior con

Hemos demostrado que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]}.$$

Corolario

Sea X un conjunto y sea $f : X \to X$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Demostración: aplicar la propiedad anterior con $m = 1$.

Iteración de una iteración

Proposición

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[mn]} = (f^{[m]})^{[n]}.$$

Iteración de una iteración

Proposición

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[mn]} = (f^{[m]})^{[n]}.$$

Idea de demostración.

Fijar m.

Iteración de una iteración

Proposición

Sea X un conjunto y sea $f \colon X \to X$.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[mn]} = (f^{[m]})^{[n]}.$$

Idea de demostración.

Fijar m. Denotar por $\mathcal{A}(n)$ la afirmación que queremos demostrar.

$$\mathcal{A}(n)\colon \quad f^{[mn]} = (f^{[m]})^{[n]}.$$

Demostrarla por inducción sobre n.

Evaluación de iteraciones de una función en un punto

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$s_0 := a, \qquad s_{n+1} := f(s_n).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$,

$$s_n = f^{[n]}(a).$$

Evaluación de iteraciones de una función en un punto

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$s_0 := a, \qquad s_{n+1} := f(s_n).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$,

$$s_n = f^{[n]}(a).$$

Idea de demostración:

Evaluación de iteraciones de una función en un punto

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$s_0 := a, \qquad s_{n+1} := f(s_n).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$,

$$s_n = f^{[n]}(a).$$

Idea de demostración: inducción sobre n.

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}_0}$ de manera inductiva:

$$s_0 := a, \qquad s_{n+1} := f(s_n).$$

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$f^{[m]}(s_n) = s_{m+n}.$$

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}_0}$ de manera inductiva:

$$s_0 := a, \qquad s_{n+1} := f(s_n).$$

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

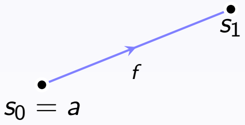
$$f^{[m]}(s_n) = s_{m+n}.$$

Demostración: ejercicio.

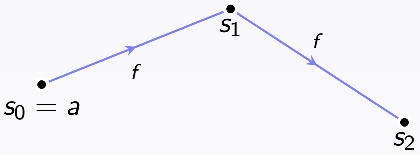
Iteraciones de una función y su evaluación en un punto

$s_0 = a$

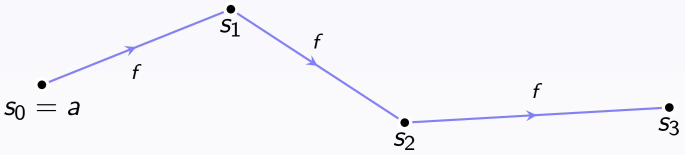
Iteraciones de una función y su evaluación en un punto



Iteraciones de una función y su evaluación en un punto



Iteraciones de una función y su evaluación en un punto



Iteraciones de una función y su evaluación en un punto