Iteraciones de funciones

1 Definición. Sean X un conjunto y $f\colon X \to X$ una función. Las *iteraciones* de f se definen mediante la siguiente regla recursiva:

$$f^{[0]} \coloneqq \mathrm{id}_X, \qquad f^{[n+1]} \coloneqq f^{[n]} \circ f \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2 Ejemplo.

$$\begin{aligned} f^{[1]} &= f^{[0]} \circ f = \mathrm{id}_X \circ f = f, \\ f^{[2]} &= f^{[1]} \circ f = f \circ f, \\ f^{[3]} &= f^{[2]} \circ f = (f \circ f) \circ f = f \circ f \circ f. \end{aligned}$$

En la última expresión omitimos los paréntesis, porque la operación de composición es asociativa.

3 Proposición (composición de iteraciones de una función)**.** *Sean X un conjunto y $f\colon X \to X$ una función. Entonces para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$*

$$f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[m+n]}. \tag{1}$$

Demostración. Fijemos m en $\mathbb{N}_0$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por $P(n)$ la afirmación (1). Demostremos que $P(n)$ se cumple para cada n en $\mathbb{N}_0$, usando la inducción matemática sobre n. La afirmación $P(0)$ se cumple:

$$f^{[m]} \circ f^{[0]} = f^{[m]} \circ \mathrm{id}_X = f^{[m]} = f^{[m+0]}.$$

Supongamos $P(n)$ y demostremos $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} f^{[m]} \circ f^{[n+1]} &= f^{[m]} \circ (f^{[n]} \circ f) = (f^{[m]} \circ f^{[n]}) \circ f \\ &= f^{[m+n]} \circ f = f^{[m+n+1]} = f^{[m+(n+1)]}. \end{aligned}$$

Hemos aplicado la Definición 1, la propiedad asociativa de la composición de funciones y la hipótesis de inducción. □

4 Corolario (las iteraciones de una función conmutan entre si)**.** *Sean X un conjunto y $f\colon X \to X$ una función. Entonces para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$*

$$f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[n]} \circ f^{[m]}.$$

Notemos que la composición de funciones, en general, no tiene propiedad conmutativa, y el Corolario 4 es una consecuencia de la propiedad *asociativa* de la composición.

5 Corolario. *Sean X un conjunto y $f\colon X \to X$ una función. Entonces para cualquier n en $\mathbb{N}_0$*

$$f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

6 Proposición (iteraciones de iteraciones de una función)**.** *Sean X un conjunto y $f\colon X \to X$ una función. Entonces para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$*

$$(f^{[m]})^{[n]} = f^{[mn]}.$$

7 Ejercicio. Demostrar la Proposición 6 usando la inducción matemática y la Proposición 3.

8 Proposición (iteraciones de una función aplicadas a un punto)**.** *Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ una función y sea $a \in X$. Definimos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ con valores en X, usando una condición inicial y una regla recursiva (en otras palabras, es una definición por inducción matemática):*

$$t_0 \coloneqq a,$$

$$t_{n+1} \coloneqq f(t_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$ se tiene que

$$f_n = f^{[n]}(a).$$

Demostración. Por inducción sobre n. □

9 Corolario. *Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ una función y sea $a \in X$. Definimos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ con valores en X, usando una condición inicial y una regla recursiva:*

$$t_0 \coloneqq a,$$

$$t_{n+1} \coloneqq f(t_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}_0$

$$f^{[m]}(t_n) = f^{[m+n]}(a) = t_{m+n}.$$

Demostración. Por las Proposiciónes 3 y 8:

$$f^{[m]}(t_n) = f^{[m]}(f^{[n]}(a)) = (f^{[m]} \circ f^{[n]})(a) = f^{[m+n]}(a) = t_{m+n}.$$ □