Isomorfismos de espacios de Hilbert

Objetivos. Establecer un criterio que un espacio de Hilbert es isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prerrequisitos. Sucesiones ortonormales (opcional: conjuntos ortonormales).

1 Proposición (criterio de isometría lineal entre espacios de Hilbert)**.** *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y sea $A\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A^*A = I_{H_1}$;

(b) $\langle Ax, Ay\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1}$ *para cualesquiera* x, y *en* H_1;

(c) $\|Ax\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ *para cualquier* x *en* H_1;

(d) $d_{H_2}(Ax, Ay) = d_{H_1}(x, y)$ *para cualesquiera* x, y *en* H_1.

2 Definición. Una sucesión ortonormal $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en H se llama *base ortonormal* si para cualquier v en H

$$v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, b_k\rangle b_k.$$

3 Proposición (criterio para que una sucesión ortonormal sea una base)**.** *Sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *el subespacio vectorial generado por* $\{b_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* H;

(b) *para cada* v *en* H, $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, b_k\rangle b_k$;

(c) *para cada* v *en* H, $\|v\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, b_k\rangle|^2$;

(d) *para cada* v *en* H, *si* $\langle v, b_k\rangle = 0$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $v = 0_H$.

(e) $\{b_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto ortonormal maximal.*

4 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces en H existe una base ortonormal.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto de H numerable y denso. Sea $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración del conjunto $\mathcal{D}$. Definimos una sucesión $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente regla: $w_k = d_k$ si $d_k \notin \ell(d_1, \ldots, d_{k-1})$, $w_k = 0_H$ si $d_k \in \ell(d_1, \ldots, d_{k-1})$. Denotemos por $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a la sucesión que se obtiene de $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ al quitar los vectores cero. Sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión que se obtiene de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ al aplicar el proceso de Gram–Schmidt. Entonces $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal y

$$\operatorname{clos}(\ell\{b_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}) = \operatorname{clos}(\{d_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}) = H.$$

$\square$

5 Proposición. *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal. Para cada v en H denotemos por $\Phi(v)$ a la sucesión*

$$\Phi(v) \coloneqq (\langle v, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces Φ es un isomorfismo isométrico de H sobre $\ell^2(\mathbb{N})$.

6 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces H es separable.*