# Isometrías de espacios métricos

**Objetivos.** Introducir el concepto de isometrías entre espacios métricos y estudiar sus propiedades elementales.

**Prerrequisitos.** Funciones uniformemente continuas.

**1 Definición.** Sean $X, Y$ espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ se llama *isometría* si esta función preserva las distancias entre puntos, esto es, para cada $a, b$ en $X$

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

En esta definición no pedimos que $f$ sea biyectiva. Es fácil ver que las isometrías siembre son inyectivas.

**2 Proposición.** *Sea $f\colon X \to Y$ una isometría. Entonces $f$ es inyectiva.*

**3 Ejemplo.** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(a) \coloneqq a + 5$.

**4 Proposición** (las isometrías son uniformemente continuas)**.** *Sea $f\colon X \to Y$ una isometria. Entonces $f$ es uniformemente continua.*

*Demostración.* En efecto, $f$ es Lipschitz continua con coeficiente 1. $\square$

**5 Proposición** (sobre la composición de isometrías)**.** *Sean $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ isometrías. Entonces $g \circ f\colon X \to Z$ también es una isometría.*

**6 Proposición** (sobre la inversa de una isometría biyectiva)**.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función biyectiva e isométrica. Entonces $f^{-1}$ también es isométrica.*

**7 Proposición** (sobre una función continua que es isométrica en un subconjunto denso del dominio)**.** *Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $D \subseteq X$, $\operatorname{cl}(D) = X$, $f\colon X \to Y$, y*

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b) \qquad (a, b \in D).$$

*Entonces $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$ para cada $a, b$ en $X$.*