Operadores acotados invertibles en un espacio de Banach

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de noviembre de 2020

Plan

Objetivo

Dado un espacio de Banach X, sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de los operadores lineales acotados $X \to X$.

Denotamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los operadores invertibles.

Vamos a demostrar que $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es un grupo y un conjunto abierto.

Más aún, la función $T \mapsto T^{-1}$ es continua.

Prerrequisitos

- Espacios de Banach, criterio de completez en términos de series.
- La norma de un operador lineal.
- El espacio de los operadores lineales acotados.
- Operadores lineales invertibles en espacios vectoriales.
- La suma de la progresión geométrica.

Plan

El álgebra de los operadores lineales acotados

Denotamos $\mathcal{B}(X,X)$ por $\mathcal{B}(X)$. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach. Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST := S \circ T.$$

Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra compleja. La norma es submultiplicativa:

$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\| \qquad (S,T \in \mathcal{B}(X)).$$

En efecto, si $x \in X$ tal que $\|x\| \le 1$, entonces

$$\|(ST)(x)\| = \|S(T(x))\| \le \|S\|\,\|Tx\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\| \le \|S\|\,\|T\|.$$

El álgebra de los operadores lineales acotados

El operador de identidad $I\colon X \to X$ es un elemento neutro en esta álgebra:

$$SI = IS = S \qquad (S \in \mathcal{B}(X)).$$

Además, $\|I\| = 1$.

El álgebra de los operadores lineales acotados

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach. Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ hay un elemento neutro e y $\|e\| = 1$. Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Los razonamientos anteriores significan que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

La multiplicación de operadores es continua

Proposición

La función $M\colon \mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$, definida mediante la regla $M(S,T) := ST$, es continua.

Idea de demostración. Sean $S,T\in\mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon>0$, encontrar un $\delta>0$ tal que si $A,B\in\mathcal{B}(X)$, $\|A-S\|<\delta$ y $\|B-T\|<\delta$, entonces $\|AB-ST\|<\varepsilon$.

Plan

Operadores invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama *invertible* si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \{S \in \mathcal{B}(X) : \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I\}.$$

Operadores invertibles

Es fácil ver que si $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$. Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición

$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ con la operación de composición es un grupo. La función inv tiene las siguientes propiedades:

$$\mathrm{inv}(I) = I, \quad \mathrm{inv}(ST) = \mathrm{inv}(T)\,\mathrm{inv}(S), \quad \mathrm{inv}(\mathrm{inv}(S)) = S \qquad (S, T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))).$$

Plan

La serie de von Neumann

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces $I - T \in \text{Inv}(\mathcal{B}(X))$,

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

Demostración

Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos S_m como

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

La condición $\|T\| < 1$ implica que $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, y $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty$.
Como el espacio normado $\mathcal{B}(X)$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge.
Denotemos su suma por U:

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{m\to\infty} S_m.$$

Demostración

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

Notamos que

$$(I-T)S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar, $S_m(I-T) = I - T^{m+1}$.

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, concluimos que

$$(I-T)U = I, \qquad U(I-T) = I.$$

Ejercicio.

Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T\| < 1$. Demostrar que

$$\|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}, \qquad \|(I-T)^{-1} - I\| \le \frac{\|T\|}{1-\|T\|}.$$

Plan

Proposición

Sea $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}.$$

Entonces $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$,

$$\|T^{-1}\| \le \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\|\,\|T - S\|}, \qquad \|T^{-1} - S^{-1}\| < \frac{\|T - S\|\,\|S^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\|\,\|S^{-1}\|}.$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Como $\|S^{-1}(S - T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| < 1$, concluimos que

$$I - S^{-1}(S - T) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X)).$$

Más aún,

$$T^{-1} = (I - S^{-1}(S - T))^{-1} \, S^{-1}.$$

De aquí obtenemos las cotas enunciadas.

Proposición

El conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto en $\mathcal{B}(X)$. La función inv es continua.

Se sigue de la proposición anterior.