Operadores lineales acotados invertibles en un espacio de Banach

En este tema suponemos que X es un espacio de Banach.

Objetivos. Demostrar que los operadores lineales acotados invertibles forman un subconjunto abierto en $\mathcal{B}(X)$, y la operación $S \mapsto S^{-1}$ es continua.

Prerrequisitos. Espacios de Banach, operadores lineales, el espacio de operadores lineales acotados, la suma de la progresión geométrica.

$\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach

Denotamos $\mathcal{B}(X, X)$ por $\mathcal{B}(X)$. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach. Definimos en $\mathcal{B}(X)$ la operación de multiplicación como la composición:

$$ST := S \circ T.$$

Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra compleja. La norma es submultiplicativa:

$$\|ST\| \le \|S\| \, \|T\| \qquad (S, T \in \mathcal{B}(X)).$$

En efecto, si $x \in X$ tal que $\|x\| \le 1$, entonces

$$\|(ST)(x)\| = \|S(T(x))\| \le \|S\| \, \|Tx\| \le \|S\| \, \|T\| \, \|x\| \le \|S\| \, \|T\|.$$

El operador de identidad $I \colon X \to X$ es un elemento neutro en esta álgebra:

$$SI = IS = S \qquad (S \in \mathcal{B}(X)).$$

Además, $\|I\| = 1$.

1 Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach. Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \le \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ hay un elemento neutro e y $\|e\| = 1$. Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Los razonamientos anteriores significan que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

2 Proposición. *La función* $M\colon \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$*, definida mediante la regla* $M(S,T) := ST$*, es continua.*

Idea de demostración. Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $\|A - S\| < \delta$ y $\|B - T\| < \delta$, entonces $\|AB - ST\| < \varepsilon$. $\square$

El grupo de los elementos invertibles

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama *invertible* si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

3 Ejercicio. Recordar la demostración de la unicidad del operador inverso.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \big\{S \in \mathcal{B}(X)\colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I\big\}.$$

Es fácil ver que si $S \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, entonces $S^{-1} \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$. Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

4 Proposición. $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ *con la operación de composición es un grupo. La función* inv *tiene las siguientes propiedades:*

$$\operatorname{inv}(I) = I, \quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S), \quad \operatorname{inv}(\operatorname{inv}(S)) = S \qquad (S, T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))).$$

La serie de von Neumann

5 Proposición. *Sea* $T \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\|T\| < 1$*. Entonces* $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$*,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

Más aún,

$$\|(I - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T\|}, \qquad \|(I - T)^{-1} - I\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

Demostración. Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos S_m como

$$S_m \coloneqq \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

La condición $\|T\| < 1$ implica que $\|T^k\| \le \|T\|^k$, y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty.$$

Como el espacio normado $\mathcal{B}(X)$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge. Denotemos su suma por U:

$$U \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{m \to \infty} S_m.$$

Entonces

$$\|U\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Notamos que

$$(I - T)S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar,

$$S_m(I - T) = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1} = I - T^{m+1}.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, concluimos que

$$(I - T)U = I, \qquad U(I - T) = I.$$

Ejercicio: demostrar que $\|U - I\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}$. $\square$

Propiedades topológicas del grupo de operadores invertibles

6 Proposición. *Sea* $S \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ *y sea* $T \in \mathcal{B}(X)$ *tal que*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}.$$

Entonces $T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$*,*

$$\|T^{-1}\| \le \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\|\,\|T - S\|}, \qquad \|T^{-1} - S^{-1}\| < \frac{\|T - S\|\,\|S^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\|\,\|S^{-1}\|}.$$

Demostración. Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Como $\|S^{-1}(S - T)\| \le \|S^{-1}\|\,\|T - S\| < 1$, concluimos que $I - S^{-1}(S - T) \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y $T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$. Más aún,

$$T^{-1} = (I - S^{-1}(S - T))^{-1}\,S^{-1}.$$

De aquí obtenemos las cotas enunciadas. $\square$

7 Proposición. *El conjunto* $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ *es abierto en* $\mathcal{B}(X)$*. La función* inv *es continua.*

Demostración. Se sigue de la demostración anterior. $\square$