Inversión de la transformada de Fourier

Definición 1 (puntos de Lebesgue de una función)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotemos por $\operatorname{Leb}(f)$ al conjunto de los puntos de Lebesgue de f:

$$\operatorname{Leb}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y) - f(x)| \, dy = 0 \right\}.$$

La utilidad de los puntos de Lebesgue se muestra en el siguiente resultado simple.

Proposición 2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $x \in \operatorname{Leb}(f)$. Entonces*

$$f(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} f(y) \, dy.$$

Demostración. Notamos que

$$\frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} f(y) \, dy - f(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} (f(y) - f(x)) \, dy.$$

La condición $x \in \operatorname{Leb}(f)$ implica que la última integral tiende a cero. □

Aceptamos sin demostración el siguiente resultado de análisis real avanzado.

Teorema 3 ("Teorema de diferenciación de Lebesgue", sin demostración)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces la medida de Lebesgue del conjunto $\mathbb{R} \setminus \operatorname{Leb}(f)$ es cero. En otras palabras, casi todos los números reales son puntos de Lebesgue de f.*

Proposición 4. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $x \in \operatorname{Leb}(f)$. Entonces*

$$f(x) = \lim_{t \to 0} (H_t * f)(x).$$

Demostración. Para cada $r > 0$ pongamos

$$\Phi(r) = \int_{x-r}^{x+r} (f(y) - f(x)) \, dy.$$

Como f es Lebesgue-integrable, para casi todo $r > 0$ se tiene que

$$\Phi'(r) = f(x+r) + f(x-r). \tag{1}$$

La hipótesis que $x \in \operatorname{Leb}(f)$ implica que

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{r} \Phi(r) \right) = 0.$$

Por consecuencia, $\Phi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$. Además, $|\Phi(r)| \leqslant \|f\|_1 + 2r|f(x)|$, así que el cociente $|\Phi(r)|/r$ es acotado por alguna constante M:

$$\frac{|\Phi(r)|}{r} \leqslant M.$$

Consideremos la diferencia $(H_t * f)(x) - f(x)$:

$$\begin{aligned}(H_t * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)H_t(y) - \int_{\mathbb{R}} f(x)H_t(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x+y) - f(x)\right) H_t(y)\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} f(x-y)H_t(y)\,dy + \int_0^{+\infty} f(x+y)H_t(y)\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi'(r)H_t(r)\,dr.\end{aligned}$$

Integramos por partes usando los hechos que $\Phi(r)H_t(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ y cuando $r \to +\infty$:

$$(H_t * f)(x) - f(x) = -\int_0^{+\infty} \Phi(r)H_t'(r)\,dr = \int_0^{+\infty} \Phi(r)\frac{r\,\mathrm{e}^{-r^2/(4t)}}{2t\sqrt{4\pi t}}\,dr.$$

Acotamos por arriba haciendo el cambio de variable $r = s\sqrt{t}$:

$$|(H_t * f)(x) - f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2\,\mathrm{e}^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}}\,ds.$$

Notamos que la función $t \mapsto \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}}$ es acotada por una constante M y tiende a cero cuando t tiende a cero. La familia de las funciones bajo el signo de integral se puede acotar por una función integrable:

$$\frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2\,\mathrm{e}^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}} \leqslant \frac{M}{2\sqrt{4\pi}} s^2\,\mathrm{e}^{-s^2/4}.$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, podemos calcular el límite de la familia de integrales como la integral de la función límite, pero la última es cero:

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2\,\mathrm{e}^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}} = 0. \qquad \square$$

Teorema 5 (fórmula de inversión de Fourier)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para casi todo x en $\mathbb{R}$,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\; dx.$$

Demostración. Es suficiente demostrar la fórmula para todo x en el conjunto de Lebesgue $\operatorname{Leb}(f)$ porque $\mu(\mathbb{R} \setminus \operatorname{Leb}(f)) = 0$. Sea $x \in \operatorname{Leb}(f)$. Como ya hemos visto,

$$(H_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\; d\xi.$$

Vamos a pasar al límite cuando t tiende a 0. Por la Proposición 4, $(H_t * f)(x) \to f(x)$. La familia de funciones bajo la integral del lado derecho se puede acotar por la función integrable $|\widehat{f}|$:

$$|\widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,| = |\widehat{f}(\xi)|\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \leqslant |\widehat{f}(\xi)|,$$

por eso podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\; d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to 0} \left(\widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} \right) = \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,. \qquad \square$$