Integración de funciones simples positivas medibles

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones simples positivas medibles y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Funciones simples, funciones medibles, medida.

En estos apuntes denotamos $[0, +\infty)$ por $\mathbb{R}_+$.

Definición de la integral de una función simple medible positiva

1 Definición (integral de Lebesgue de una función simple medible positiva)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ una función simple medible de la forma

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j},$$

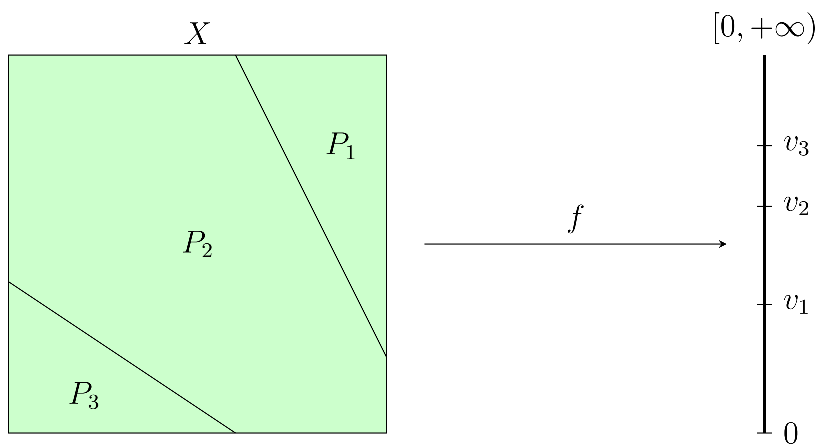
donde $v_1, \ldots, v_n$ todos los elementos de $f[X]$, diferentes a pares, y $P_j = f^{-1}(\{v_j\})$. Entonces

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mu(P_j). \tag{1}$$

Aquí se usa el acuerdo que $0 \cdot \infty = 0$: si para algún j en $\{1, \ldots, m\}$ se tiene que $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces el sumando correspondiente es 0.

2 Ejemplo. Sea (P_1, P_2, P_3) una partición de X, tal que $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{F}$, y sean v_1, v_2, v_3 tres números no negativos, diferentes a pares. Consideramos la función

$$f = v_1 \, \mathbb{1}_{P_1} + v_2 \, \mathbb{1}_{P_2} + v_3 \, \mathbb{1}_{P_3}.$$



Su integral de Lebesgue es

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = v_1 \, \mu(P_1) + v_2 \, \mu(P_2) + v_3 \, \mu(P_3).$$

3 Observación. Por la definición,

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Vamos a aclarar esta definición para algunos casos particulares.

- Si $X = \varnothing$, entonces la suma es vacía ($m = 0$), así que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.
- Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$ para algún j, entonces el sumando correspondiente es $v_j \, \mu(P_j) = 0$.
- Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$ para algún j, entonces $v_j \, \mu(P_j) = 0$.
- Si $v_j > 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$ para algún j, entonces $v_j \, \mu(P_j) = +\infty$.

Fórmula para la integral de Lebesgue de una función simple medible positiva, dada por una representación generalizada

4 Definición (partición generalizada de un conjunto, repaso)**.** Una familia $(Q_k)_{k\in J}$ se llama *partición generalizada* de un conjunto C, si los elementos de esta familia son disjuntos por pares y su unión es C:

$$\Big(\forall j, k \in J \qquad (j \neq k) \quad \Longrightarrow \quad (Q_j \cap Q_k = \varnothing)\Big) \qquad \wedge \qquad \bigcup_{k\in J} Q_k = C.$$

5 Proposición (representación generalizada de una función simple, repaso)**.** *Sea X un conjunto, sea $(Q_k)_{k=1}^n$ una partición generalizada de X y sean $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$. Notemos que algunos de los conjuntos $Q_1, \ldots, Q_n$ pueden ser vacíos y algunos de los números $w_1, \ldots, w_n$ pueden ser iguales entre si.*

Entonces la siguiente función $f \colon X \to \mathbb{R}_+$ es simple:

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Más aún, la representación canónica de f es

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j},$$

donde $v_1, \ldots, v_m$ son todos los elementos de $f[X]$, diferentes a pares, y

$$P_j = \bigcup_{\substack{1 \le k \le n: \\ Q_k \ne \varnothing \\ w_k = v_j}} Q_k. \tag{2}$$

Notemos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_n\}$.

6 Proposición (la integral de una función simple medible positiva dada por su representación generalizada)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ una función simple medible dada por su representación generalizada:*

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Aquí suponemos que $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$ y $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{F}$ son algunos conjuntos disjuntos a pares cuya unión es igual a X. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \mu(Q_k). \tag{3}$$

En otras palabras, la Proposición 6 dice que tenemos un análogo de la fórmula (1), aunque cuando usamos una representación generalizada de f.

Demostración. Denotemos por $v_1, \ldots, v_m$ a todos los valores de f, diferentes a pares:

$$f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad v_1, \ldots, v_m \text{ son diferentes a pares.}$$

Notemos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_n\}$. De todos los índices $1, \ldots, n$ separamos aquellos que corresponden al conjunto vacío, y los demás agrupamos por los valores de la función f. Más formalmente, partimos el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en partes $K_0, K_1, \ldots, K_m$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_0 &\coloneqq \bigl\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon \ Q_k = \varnothing\bigr\}, \\ J_j &\coloneqq \bigl\{k \in \{1, \ldots, n\} \colon \ Q_k \ne \varnothing, \ w_k = v_j\bigr\}. \end{aligned}$$

Entonces la fórmula (2) se puede escribir como

$$P_j = \bigcup_{k \in K_j} Q_k. \tag{4}$$

Por la definición de la integral,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j). \tag{5}$$

Tenemos por demostrar que el lado derecho de (3) es igual al lado derecho de (5). Partimos los sumandos de la suma (3) en grupos $K_0, K_1, \ldots, K_m$:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \mu(Q_k) = \sum_{k \in K_0} w_k \mu(Q_k) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_j} w_k \mu(Q_k).$$

En la primera suma $Q_k = \varnothing$. De la fórmula (4) se sigue que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ la familia $(Q_k)_{k \in K_j}$ es una partición generalizada de P_j. Además, para cada $k \in K_j$ tenemos que $w_k = v_j$. Aplicando la propiedad aditiva de la medida μ obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \, \mu(Q_k) = 0 + \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu \left(\bigcup_{k \in K_j} Q_k \right) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j). \qquad \square$$

7 Ejemplo (la integral de la función indicadora)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \setminus A) = \mu(A).$$

8 Ejemplo (una suma finita como una integral)**.** Sea $a = [a_k]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}_+^n$. Consideramos $X = \{1, \ldots, n\}$ con la σ-álgebra 2^X y con la medida de conteo ν. Entonces $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, \mathbb{R}_+)$. La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1,\ldots,n\}} a \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La integral de Lebesgue de funciones simples medibles positivas sobre subconjuntos medibles del dominio

9 Proposición. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Pongamos*

$$\mathcal{F}_A \coloneqq \big\{B \in \mathcal{F}\colon \quad B \subseteq A\big\}, \qquad \mu_A \coloneqq \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Ejercicio: demostrar la proposición. La definición de $\mathcal{F}_A$ se puede escribir también como $\mathcal{F}_A \coloneqq 2^A \cap \mathcal{F}$.

10 Proposición (la restricción de una función medible a un conjunto medible es una función medible)**.** *Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.*

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A\colon\ f|_A(x) \in B\} = \{x \in A\colon\ f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}[B] \in \mathcal{F}. \qquad \square$$

11 Definición (definición de la integral sobre un conjunto medible)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_A f|_A \,\mathrm{d}\mu_A.$$

12 Proposición (fórmula para la integral sobre un conjunto)**.** *Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).$$

Demostración. Es fácil ver que la familia $(P_j \cap A)_{j=1}^m$ es una partición generalizada de A, y

$$\forall x \in P_j \cap A \qquad f(x) = v_j.$$

Por lo tanto, $f|_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

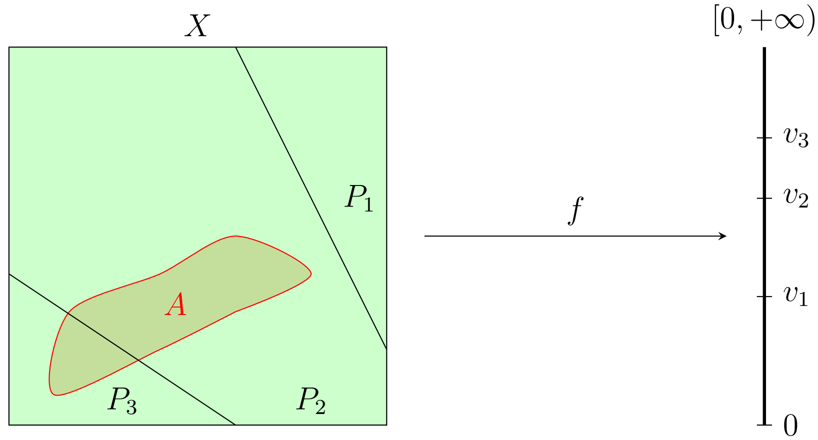
$$f|_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Luego

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def}}{=\!=} \int_A f|_A \,\mathrm{d}\mu_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu|_A(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).$$

$\square$

13 Ejemplo. Consideremos el Ejemplo 2, y supongamos que $A \in \mathcal{F}$.



Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v_1 \, \mu(A \cap P_1) + v_2 \, \mu(A \cap P_2) + v_3 \, \mu(A \cap P_3).$$

14 Proposición (otra fórmula para la integral sobre un conjunto)**.** *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *y sea* $A \in \mathcal{F}$*. Entonces*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 0 \, \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j \cap A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$