Integración de funciones simples positivas medibles

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones simples positivas medibles y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Funciones simples, funciones medibles, medida.

1. Definición (integral de Lebesgue de una función simple medible positiva). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ una función simple medible de la forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} v_k \chi_{A_k},$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ son valores diferentes de s y $A_k = s^{-1}(\{v_k\})$. Además sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_Y s\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} v_k \mu(A_k \cap Y). \tag{1}$$

Aquí se usa el acuerdo que $0 \cdot \infty = 0$: si para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $v_k = 0$ y $\mu(A_k \cap Y) = +\infty$, entonces el sumando correspondiente es 0.

2. Definición (partición generalizada de un conjunto, repaso). Una familia $(P_j)_{j \in J}$ se llama *partición generalizada* de un conjunto C si los elementos de esta familia son disjuntos por pares y su unión es C:

$$(\forall j, k \in J \qquad (j \neq k) \quad \Longrightarrow \quad (P_j \cap P_k = \varnothing)) \qquad \wedge \qquad \bigcup_{j \in J} P_j = C.$$

3. Representación generalizada de una función simple (repaso). Sea X un conjunto, sea $(C_j)_{j=1}^m$ una partición generalizada de X y sean $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$. Notemos que algunos de los conjuntos $C_1, \ldots, C_m$ pueden ser vacíos y algunos de los números $w_1, \ldots, w_m$ pueden ser iguales entre si.

Entonces la siguiente función $s\colon X \to \mathbb{C}$ es simple:

$$s = \sum_{j=1}^{m} w_j \chi_{C_j}.$$

Más aún, la representación canónica de s es

$$s = \sum_{k=1}^{n} v_k \chi_{A_k},$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ son los valores diferentes de s (así que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \{w_1, \ldots, w_m\}$) y

$$A_k = \bigcup_{\substack{1 \le j \le m: \\ C_j \neq \varnothing \\ v_j = w_k}} C_j. \tag{2}$$

4. Proposición (integral de una función simple medible positiva dada por su representación generalizada). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ una función simple medible dada por su representación generalizada:

$$f = \sum_{j=1}^{m} w_j \chi_{C_j}.$$

Aquí suponemos que $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}_+$ y $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{F}$ son algunos conjuntos disjuntos cuya unión es igual a X. Entonces para todo $Y \in \mathcal{F}$

$$\int_Y f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu(Y \cap C_j). \tag{3}$$

Es decir, la fórmula (1) también es válida en el caso de una representación generalizada.

Demostración. Denotemos todos los valores diferentes de s por $v_1, \ldots, v_n$. Notemos que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \{w_1, \ldots, w_m\}$. De todos los índices $1, \ldots, m$ separamos aquellos que corresponden al conjunto vacío, y los demás agrupamos por los valores de la función s. Más formalmente, partimos el conjunto $\{1, \ldots, m\}$ en partes $J_0, J_1, \ldots, J_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_0 &\coloneqq \big\{ j \in \{1, \ldots, m\} \colon \; C_j = \varnothing \big\}, \\ J_k &\coloneqq \big\{ j \in \{1, \ldots, m\} \colon \; C_j \neq \varnothing, \; w_j = v_k \big\}. \end{aligned}$$

Entonces la fórmula (2) se puede escribir como

$$A_k = \bigcup_{j \in J_k} C_j. \tag{4}$$

Por la definición de la integral,

$$\int_Y f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} v_k \mu(Y \cap A_k). \tag{5}$$

Tenemos por demostrar que el segundo término de (3) es igual al segundo término de (5). Partimos los sumandos de la suma (3) en grupos $J_0, J_1, \ldots, J_n$:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \mu(Y \cap C_j) = \sum_{j \in J_0} w_j \mu(Y \cap C_j) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} w_j \mu(Y \cap C_j).$$

En la primera suma $Y \cap C_j = \varnothing$. Aplicando (4) es fácil demostrar que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ la familia $(Y \cap C_j)_{j \in J_k}$ es una partición generalizada de $Y \cap A_k$. Además para cada $j \in J_k$ tenemos que $w_j = v_k$. Aplicando la propiedad aditiva de la medida μ obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \mu(Y \cap C_j) = 0 + \sum_{k=1}^{n} v_k \mu \left(\bigcup_{j \in J_k} Y \cap C_j \right) = \sum_{k=1}^{n} v_k \mu(Y \cap A_k). \qquad \square$$

Algunas propiedades de la integral de Lebesgue de funciones simples medibles positivas

En toda esta sección suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Las demostraciones de las siguientes propiedades son ejercicios simples.

5. Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_Y f \, d\mu = \int_X \chi_Y \cdot f \, d\mu.$$

6. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_Y s \, d\mu \geq 0.$$

7. Integral de una función simple sobre un conjunto de medida cero. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(Y) = 0$. Entonces

$$\int_Y s \, d\mu = 0.$$

8. Integral sobre un conjunto donde la función es constante, el caso de una función simple positiva. Sean $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$, $w \in [0, +\infty)$ y $Y \in \mathcal{F}$ tales que

$$f(x) = w \qquad \forall x \in Y.$$

Entonces

$$\int_Y f \, d\mu = w \, \mu(Y).$$

9. Integral de una función simple que se anula en el conjunto de la integración. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Si $s(x) = 0$ para todo $x \in Y$, entonces

$$\int_Y s \, d\mu = 0.$$

10. Ejercicio. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que

$$\int_Y s \, d\mu = 0.$$

11. Proposición de la medida definida como la integral de una función simple medida positiva sobre el conjunto de integración variable. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$. Entonces la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida mediante la siguiente regla es una medida:

$$\varphi(Y) = \int\limits_Y s\, d\mu.$$

12. Corolario: Monotonía de la integral de una función simple positiva respecto al conjunto de integración. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Entonces

$$\int\limits_A s\, d\mu \le \int\limits_B s\, d\mu.$$

13. Propiedad homogénea de la integral, el caso de una función simple positiva. Sea $s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$, sea $c \in \mathbb{R}_+$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_Y cs\, d\mu = c \int\limits_Y s\, d\mu.$$

14. Integral de la suma de funciones simples positivas. Sean $s, t \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_Y (s + t)\, d\mu = \int\limits_Y s\, d\mu + \int\limits_Y t\, d\mu.$$

Idea de demostración. Si s y t tienen representaciones canónicas

$$s = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \chi_{A_p}, \qquad t = \sum_{q=1}^{n} \beta_q \chi_{B_q},$$

entonces una representación generalizada de $s + t$ es

$$s + t = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (\alpha_p + \beta_q) \chi_{A_p \cap B_q}.$$

Gracias a la Proposición 4, podemos usar esta representación para escribir la integral $s + t$. Para completar la demostración demuestre que para cada $p \in \{1, \ldots, m\}$ la familia $(Y \cap A_p \cap B_q)_{q=1}^{n}$ es una partición generalizada de $Y \cap A_p$, para cada $q \in \{1, \ldots, n\}$ la familia $(Y \cap A_p \cap B_q)_{p=1}^{m}$ es una partición generalizada de $Y \cap B_q$, y simplifique la suma

$$\int (s + t)\, d\mu = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (\alpha_p + \beta_q) \mu(Y \cap A_p \cap B_q). \qquad \square$$

15. Monotonía de la integral con respecto a la función, el caso de funciones simples positivas. Sean $s, t \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ tales que $s \le t$, y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_Y s\, d\mu \le \int\limits_Y t\, d\mu.$$