Integración de funciones complejas

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones complejas y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Integral de Lebesgue de funciones reales, parte real y compleja de una función compleja.

1. Desigualdades entre el valor absoluto de un número complejo y sus partes real e imaginaria. Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$|\operatorname{Re}(z)| \le |z|, \qquad |\operatorname{Im}(z)| \le |z|, \qquad |z| \le |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. Desigualdades entre el valor absoluto de una función y sus partes real e imaginaria. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces para todo $t \in X$

$$|\operatorname{Re}(f(t))| \le |f(t)|, \qquad |\operatorname{Im}(f(t))| \le |f(t)|, \qquad |f(t)| \le |\operatorname{Re}(f(t))| + |\operatorname{Im}(f(t))|.$$

3. Proposición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\displaystyle\int_X |f|\, d\mu < +\infty$.

(b) $\displaystyle\int_X |\operatorname{Re}(f)|\, d\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X |\operatorname{Im}(f)|\, d\mu < +\infty$.

4. Definición de la integral de Lebesgue de una función medible con valores complejos. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Se dice que f es *Lebesgue-integrable* respecto a la medida μ y se escribe $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ o simplemente $f \in L^1(\mu)$ si

$$\int_X |f|\, d\mu < +\infty.$$

En este caso para todo $Y \in \mathcal{F}$ la *integral de f sobre Y respecto a la medida μ* se define como

$$\int_Y f\, d\mu = \int_Y \operatorname{Re}(f)\, d\mu + \mathrm{i} \int_Y \operatorname{Im}(f)\, d\mu.$$

5. Observación. Para funciones reales la definión nueva da el mismo valor que la definición anterior, porque la parte imaginaria es la constante cero.

Propiedades lineales de la integral de Lebesgue de funciones con valores complejos

6. Parte real y parte imaginaria de la suma de dos funciones complejas. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. Exprese $\operatorname{Re}(f+g)$ e $\operatorname{Im}(f+g)$ a través de $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\operatorname{Re}(g)$, $\operatorname{Im}(g)$.

7. Proposición (integral de la suma de dos funciones integrables). Sean $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces $f + g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\int\limits_X (f+g)\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu.$$

8. Parte real y parte imaginaria del producto de una función compleja por un escalar complejo. Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Exprese $\operatorname{Re}(\alpha f)$ e $\operatorname{Im}(\alpha f)$ en términos de $\operatorname{Re}(\alpha)$, $\operatorname{Im}(\alpha)$, $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$.

9. Proposición (integral del producto de una función integrable por un escalar). Sea $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\int\limits_X (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int\limits_X f\, d\mu.$$

Valor absoluto de una integral e integral del valor absoluto

10. Ejercicio (rotación que convierte un número complejo en un número positivo). Sea $z \in \mathbb{C}$. Construya un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$.

Plan de la solución. Primero considere el caso $z = 0$. Para el caso principal $z \neq 0$ construya α de tres maneras diferentes:

1. Exprese α a través de $\bar{z}$ y $|z|$.

2. Sea $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Exprese α a través de x, y.

3. Sea $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Exprese α a través de ρ, θ. □

11. Teorema (comparación del valor absoluto de la integral de una función con la integral del valor absoluto de la misma función). Sea $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces $|f| \in L^1(X, \mu, \mathbb{R}_+)$ y

$$\left| \int\limits_X f\, d\mu \right| \leq \int\limits_X |f|\, d\mu.$$

Demostración. Sea

$$z = \int\limits_X f\, d\mu.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos

$$u \coloneqq \operatorname{Re}(\alpha f).$$

Entonces $u \leq |\alpha f| = |f|$, y

$$\left| \int\limits_X f\, d\mu \right| = |z| = \alpha z = \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int\limits_X f\, d\mu \right) = \int\limits_X u\, d\mu \leq \int\limits_X |f|\, d\mu.$$ □