Integrales de series de funciones complejas (un tema del curso “Análisis Real”)

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

17 de junio de 2021

Plan

1. Introducción y herramientas auxiliares
2. $\int \sum = \sum \int$ para funciones complejas
3. Lema de Borel–Cantelli

Plan

1. Introducción y herramientas auxiliares
2. $\int \sum = \sum \int$ para funciones complejas
3. Lema de Borel–Cantelli

Objetivo: para una sucesión de funciones complejas f_k, demostrar que

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu,$$

bajo la suposición que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Objetivo: para una sucesión de funciones complejas f_k, demostrar que

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu,$$

bajo la suposición que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Prerrequisitos:

- convergencia y convergencia absoluta de series numéricas;
- el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue;
- la desigualdad de Márkov y sus corolarios.

Repaso: cada función integrable toma valores finitos c.t.p.

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Entonces $f < +\infty$ c.t.p.

Repaso: cada función integrable toma valores finitos c.t.p.

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Entonces $f < +\infty$ c.t.p.

Demostración: aplicar la desigualdad de Márkov para cada v en $(0, +\infty)$ y usar el hecho que

$$\{+\infty\} \subseteq [v, +\infty].$$

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$, $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tales que:

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que:

1) $f_n \xrightarrow{X} g$,

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que:

1) $f_n \xrightarrow{X} g$,
2) existe $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $|f_n| \leq h$.

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que:

1) $f_n \xrightarrow{X} g$,
2) existe $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $|f_n| \leq h$.

Entonces $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$,

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$, $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tales que:

1) $f_n \xrightarrow{X} g$,
2) existe $h \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $|f_n| \le h$.

Entonces $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

Repaso: el teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$, $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tales que:

1) $f_n \xrightarrow{X} g$,
2) existe $h \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $|f_n| \le h$.

Entonces $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$.

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Notemos que si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $g_1|_Y = g_2|_Y = f$,

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Notemos que si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $g_1|_Y = g_2|_Y = f$, entonces

$$\int_X g_1 \, \mathrm{d}\mu =$$

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Notemos que si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $g_1|_Y = g_2|_Y = f$, entonces

$$\int_X g_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X g_2 \, \mathrm{d}\mu =$$

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Notemos que si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $g_1|_Y = g_2|_Y = f$, entonces

$$\int_X g_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X g_2 \, \mathrm{d}\mu = \int_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de una función definida casi en todas partes

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$, y sea $f \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\text{en vez de} \quad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{a veces se escribe} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Notemos que si $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $g_1|_Y = g_2|_Y = f$, entonces

$$\int_X g_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_X g_2 \, \mathrm{d}\mu = \int_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

En otras palabras, cualquier extensión de la función f al conjunto X, si es medible, tiene la misma integral.

Repaso: definición de la suma de una serie de números

Sean $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\beta \in \mathbb{C}$. Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge a β y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta,$$

si

Repaso: definición de la suma de una serie de números

Sean $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\beta \in \mathbb{C}$. Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge a β y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta,$$

si

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n = \beta.$$

Repaso: series de números positivos

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Repaso: series de números positivos

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Para series de números positivos, la notación $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ siempre tiene sentido.

Repaso: series de números positivos

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,+\infty]^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n.$$

Para series de números positivos, la notación $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ siempre tiene sentido.

En este caso, se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Un error de notación muy grave

Supongamos que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y la sucesión de sus sumas parciales no converge en $\mathbb{C}$.

Un error de notación muy grave

Supongamos que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y la sucesión de sus sumas parciales no converge en $\mathbb{C}$.

En estas suposiciones, está muy mal escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Repaso: la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia

Proposición

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$. Entonces existe β en $\mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta.$$

Repaso: la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia

Proposición

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$. Entonces existe β en $\mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta.$$

Idea de demostración.

$$s_p := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n, \qquad t_p := \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|.$$

Repaso: la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia

Proposición

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$. Entonces existe β en $\mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta.$$

Idea de demostración.

$$s_p := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n, \qquad t_p := \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|.$$

Demostrar que $|s_p - s_q| \leq |t_p - t_q|$.

Como $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $[0, +\infty)$, la sucesión $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Plan

1. Introducción y herramientas auxiliares

2. $\int \sum = \sum \int$ para funciones complejas

3. Lema de Borel–Cantelli

$\int \sum = \sum \int$ para funciones complejas

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge casi en cada punto x, su suma g es una función μ-integrable, y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración

Definamos $h \colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Idea de demostración

Definamos $h\colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

Idea de demostración

Definamos $h\colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Idea de demostración

Definamos $h\colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int_X h \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Sea

$$B := \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}.$$

Idea de demostración

Definamos $h\colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Sea

$$B := \{x \in X\colon \ h(x) < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon \ h(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\mu(E) = 0$.

Idea de demostración

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

$$B = \{x \in X\colon\ |h(x)| < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}, \qquad \mu(E) = 0.$$

Idea de demostración

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

$$B = \{x \in X\colon\ |h(x)| < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}, \qquad \mu(E) = 0.$$

Para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Idea de demostración

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

$$B = \{x \in X\colon\ |h(x)| < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}, \qquad \mu(E) = 0.$$

Para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Por lo tanto, para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Idea de demostración

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

$$B = \{x \in X\colon\ |h(x)| < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}, \qquad \mu(E) = 0.$$

Para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Por lo tanto, para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

Idea de demostración

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

$$B = \{x \in X\colon\ |h(x)| < +\infty\}, \qquad E := \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}, \qquad \mu(E) = 0.$$

Para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.
Por lo tanto, para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$

El resto de la demostración: aplicar el TCD a la sucesión de las sumas parciales de $(\mathbb{1}_B f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio. Consideramos $f_n \colon [0,1] \to [0,+\infty]$,

$$f_n = \mathbb{1}_{[0,1/2^n]}.$$

Determinar, en qué puntos de $[0,1]$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Plan

1. Introducción y herramientas auxiliares
2. $\int \sum = \sum \int$ para funciones complejas
3. Lema de Borel–Cantelli

Lema/teorema de Borel–Cantelli

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Definimos

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Entonces $\mu(E) = 0$.

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N} \colon \ x \in A_n\}.$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N}\colon\ \ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \Longleftrightarrow$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N}\colon \ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$

$$\Longleftrightarrow$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N} \colon \; x \in A_n\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x \in E \quad &\iff \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \iff \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n \\ &\iff \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad n \in J_x \end{aligned}$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad n \in J_x \quad \Longleftrightarrow$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N} \colon\ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad n \in J_x \quad \Longleftrightarrow \quad J_x \text{ es infinito.}$$

Otra descripción del conjunto E

Para cada x en X, pongamos

$$J_x := \{n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n\}.$$

Entonces

$$x \in E \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad\Longleftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$

$$\Longleftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad n \in J_x \quad\Longleftrightarrow\quad J_x \text{ es infinito.}$$

Resumen: E es el conjunto te todos aquellos puntos x que pertenecen a A_n para una cantidad infinita de los índices n.

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \iff \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \iff$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \iff \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \iff \qquad x \in E.$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \iff \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \iff \qquad x \in E.$$

Aplicamos el teorema de la integral de una serie de funciones positivas:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu =$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \iff \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \iff \qquad x \in E.$$

Aplicamos el teorema de la integral de una serie de funciones positivas:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \,\mathrm{d}\mu =$$

Idea de la demostración

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in E.$$

Aplicamos el teorema de la integral de una serie de funciones positivas:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$